Revista de Economía Aplicada E A Número 4 (vol. II), 1994, págs. 149 a 173

PROTECCIÓN PROPORCIONAL EN LOS FONDOS DE PENSIONES: UNA ESTRATEGIA DE INVARIABILIDAD TEMPORAL E INTERCAMBIO*

JOAN MONTLLOR I SERRATS
MARÍA-ANTONIA TARRAZÓN RODÓN
Universidad Autónoma de Barcelona

La estrategia de inversión para un fondo de pensiones debe proteger, en un horizonte indefinido, su coeficiente de dotación (activo/pasivo), de forma que resulte sistemáticamente superior a un determinado valor previamente elegido. La *estrategia de protección proporcional* propuesta es una estrategia de invariabilidad temporal [Brennan y Schwartz (1988)] aplicada al caso de intercambio [Margrabe (1978)]. El coeficiente de dotación así obtenido es independiente de la volatilidad de la cartera de riesgo relativa y de las oscilaciones del tipo de interés. Además, la distribución de la inversión total entre cartera de riesgo y activo de comportamiento idéntico al pasivo no requiere reajustes a lo largo del tiempo.
Palabras clave: fondos de pensiones, estrategias de inversión, invariabilidad temporal, opciones de intercambio.

El objetivo de este trabajo es construir un modelo sobre una estrategia de de inversión para los fondos de pensiones. Las aportaciones realizadas al plan de pensiones por los partícipes y, en los casos en que proceda, por el promotor se integran en un fondo de pensiones con la finalidad de que, debidamente invertidas por los gestores del fondo, constituyan, junto con los rendimientos que genere esta inversión, un capital suficiente para garantizar en su momento a los beneficiarios del plan de pensiones el pago de las prestaciones

* Este trabajo se basa en parte de la tesis doctoral de María Antonia Tarrazón Rodón, *Planes y fondos de pensiones: función financiera y estrategias de inversión,* dirigida por el Dr. Joan Montllor i Serrats, para cuya elaboración concedió una beca la Fundación Fondo para la Investigación Económica y Social. Una versión preliminar del mismo se presentó en las I Jornadas de Economía Financiera, organizadas en junio de 1993 por el Instituto de Economía Pública y la Fundación BBV. Agradecemos los comentarios de José Miguel Rodríguez Fernández, profesor de la Universidad de Valladolid, en el transcurso de esas Jornadas y las sugerencias sobre aspectos formales de David Pujolar Morales, profesor de la Universidad Autónoma de Barcelona, así como las puntualizaciones de dos evaluadores anónimos.

en él estipuladas. Puesto que alcanzar este objetivo es la principal finalidad de un fondo de pensiones, los gestores del mismo deben elegir su estrategia de inversión teniendo en cuenta, junto con la propia capacidad de gestión y las oportunidades que ofrezca el mercado, las muy particulares características de la inversión que se lleva a cabo. Se trata de aplicar una estrategia que combine seguridad y rentabilidad. Seguridad para permitir el cumplimiento de las obligaciones financieras a corto plazo y rentabilidad para generar fondos suficientes que hagan posible el cumplimiento de las obligaciones a largo plazo.

Es, pues, éste un caso en que para establecer la estrategia de inversión es *esencial* conocer las características de las obligaciones financieras del fondo, es decir, la estructura de su pasivo, constituido por el valor actual de la deuda por prestaciones del plan de pensiones. En otras palabras, se trata de diseñar un activo capaz de cumplir los requerimientos que dimanan del pasivo, o *liability-asset* [Bookstaber y Gold (1988)]. Para calcular el valor de la deuda del fondo hay que actualizar las pensiones a un tipo de interés que es función del tipo de interés básico que rige en el mercado financiero. Por tanto, sus variaciones futuras no pueden predecirse en un mercado financiero eficiente, donde siguen un proceso estocástico. De ahí que el valor actual del pasivo de un fondo de pensiones deba considerarse una variable aleatoria.

Las tendencias actuales sobre estrategias de inversión aplicables a los fondos de pensiones recomiendan que éstos adopten una estrategia capaz de garantizar que el cociente activo/pasivo del fondo de pensiones –denominado *coeficiente de dotación*– resulte sistemáticamente superior a un determinado valor. Se trata, pues, de una estrategia que se encuadra entre las denominadas estrategias de cartera estructurada, más concretamente de *surplus insurance*[1]. Una estrategia que cumple esta propiedad es una estrategia de intercambio, puesto que se basa en opciones de intercambio. Por otro lado, esta estrategia debe ofrecer una protección de horizonte indefinido –es decir, el tipo de protección es función del tiempo–, ya que los fondos de pensiones no presentan un determinado horizonte en el que esté prevista la finalización de su actividad. Por estos motivos, se recomienda que la estrategia de inversión adoptada por un fondo de pensiones proteja, en un horizonte indefinido, su coeficiente de dotación según un valor previamente elegido, esto es, sea una *estrategia de invariabilidad temporal e intercambio*[2].

En este trabajo presentamos un modelo de estrategia de inversión para los fondos de pensiones que reúne ambas características, invariabilidad temporal e intercambio. El apartado 1 recoge una breve síntesis del modelo de invariabilidad temporal de Brennan y Schwartz (1988), circunscrita al caso que consideramos de interés para los fondos de pensiones. En el apartado 2 construimos otro modelo de invariabilidad temporal que se obtiene al añadir a una cartera de títulos con riesgo una opción de venta americana perpetua. Demostramos que el valor de la estrategia resultante y el valor de la estrategia de Brennan y Schwartz previamente estudiada son proporcionales. La finalidad principal de este nuevo modelo –que puede considerarse, en realidad, como una variante del anterior– es facilitar la

(1) El lector interesado en una descripción detallada y sistematizada de las estrategias de inversión para los fondos de pensiones puede encontrarla en Tarrazón y Montllor (1993a).

(2) Véase Bookstaber y Gold (1988), Kritzman (1988), Wagner (1988), Tarrazón y Montllor (1993a).

interpretación económica de la invariabilidad temporal. A continuación, destacamos en el apartado 3 las propiedades esenciales de las opciones de intercambio, siguiendo el trabajo de Margrabe (1978), como paso previo a la adaptación de los modelos mencionados a una estrategia de intercambio (apartados 4 y 5). Precisamente la unión de la invariabilidad temporal con el intercambio nos conduce a una estrategia de inversión que reúne ambas propiedades y que denominamos *estrategia de protección proporcional.* Los apartados 6 y 7 se ocupan de diversos aspectos relacionados con su aplicación.

1. El modelo de invariabilidad temporal Brennan y Schwartz

El modelo de invariabilidad temporal de Brennan y Schwartz desarrolla estrategias en las que la inversión se distribuye entre dos activos: una cartera de títulos con riesgo y un activo o título libre de riesgo. Una estrategia de inversión cumple la propiedad de invariabilidad temporal cuando la fracción de la riqueza que se invierte en la cartera de títulos con riesgo es, a lo sumo, función del valor de dicha cartera. En particular, no es función del tiempo. Una versión más restrictiva del concepto de invariabilidad temporal corresponde al caso en que, además, tampoco depende del tiempo el valor de la estrategia, entendiéndose por valor de la estrategia el valor de los fondos acumulados por la estrategia de inversión aplicada[3].

El valor de la cartera de títulos con riesgo, S, sigue un proceso estocástico del tipo general:

$$\frac{dS}{S} = \mu\, d\tau + \sigma\, dz \qquad [1]$$

donde dz es el incremento debido a un proceso estocástico estándar de Gauss-Wiener y μ es la tasa de rentabilidad esperada instantánea de la cartera.

Por otra parte, el estudio de Brennan y Schwartz se ciñe a estrategias que cumplen las tres propiedades siguientes: 1) la fracción de la riqueza invertida en la cartera de riesgo sigue una función continua que depende, a lo sumo, del valor de la cartera y del tiempo; 2) la fracción de la riqueza no invertida en la cartera de riesgo se invierte en el título libre de riesgo; y 3) la estrategia cumple la propiedad de autofinanciación, es decir, no se añaden ni retiran fondos de la misma durante su desarrollo.

El modelo de Brennan y Schwartz no incorpora el pago de dividendos en la cartera de riesgo, ni el pago de intereses por parte del título libre de riesgo. Por tanto, una aplicación estricta de esta estrategia requeriría una cartera de riesgo formada por acciones que no distribuyeran dividendos y un título libre de riesgo de cupón cero. Sin embargo, esta exigencia puede relajarse, por un lado, reinvirtiendo los dividendos en las mismas acciones que los distribuyen y, por otro, reinvirtiendo igualmente los intereses del título libre de riesgo en sí mismo, aunque, evidentemente, haya que protegerse de las variaciones del tipo de interés por medio de una estrategia complementaria, cuestión que no se aborda en este trabajo.

Brennan y Schwartz demuestran que el valor de la estrategia cuando han transcurrido τ períodos desde su inicio es:

(3) Véase Brennan y Schwartz (1988), págs. 286 y 289.

$$V(S,\tau,c_1,c_2,\gamma,r,\sigma) = e^{\gamma\tau} \cdot \left[c_1 \cdot S^{\alpha_1} + c_2 \cdot S^{\alpha_2}\right] \qquad [2]$$

donde:

$$\alpha_1 = \frac{-(r - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sqrt{(r + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 - 2\gamma\sigma^2}}{\sigma^2} \qquad [3]$$

y

$$\alpha_2 = \frac{-(r - \frac{1}{2}\sigma^2) - \sqrt{(r + \frac{1}{2}\sigma^2)^2 - 2\gamma\sigma^2}}{\sigma^2} \qquad [4]$$

siendo σ la desviación típica de la rentabilidad de la cartera de títulos con riesgo y r el interés del título libre de riesgo. Por otra parte, c_1, c_2 y γ son variables exógenas cuyos valores deben elegirse de forma que satisfagan la restricción presupuestaria inicial y la siguiente desigualdad:

$$\gamma \leq \frac{\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} \qquad [5]$$

la cual se justifica por la necesidad de que los términos que aparecen bajo raíz cuadrada en α_1 α_2 sean positivos. La restricción presupuestaria inicial se refiere, simplemente, a que el total de la inversión a efectuar en dicho momento en título libre de riesgo y cartera de riesgo no debe superar el presupuesto de que se dispone. Brennan y Schwartz consideran una cartera de títulos con riesgo de un importe igual al presupuesto inicial e igualan ambos a la unidad. Por tanto, el valor de la estrategia en el momento inicial es:

$$V\ (1,0) = 1 \qquad [6]$$

de donde se deduce[4]:

$$c_1 = c \qquad [7]$$

$$c_2 = 1 - c \qquad [8]$$

por tanto, el valor de la estrategia τ períodos después del inicio cumple la siguiente ecuación:

$$V\ (s,\tau,c,\gamma,r,\sigma) = e^{\gamma\tau} \left[c \cdot s^{\alpha_1} + (1-c) \cdot s^{\alpha_2}\right] \qquad [9]$$

donde s minúscula designa el valor, en un momento posterior al inicial, de la cartera de riesgo de la estrategia, cuyo valor en el momento inicial se ha igualado a la unidad (cartera de riesgo normalizada).

Brennan y Schwartz interpretan γ como la tasa de crecimiento continuo del valor de la estrategia a lo largo del tiempo. Ciertamente, el valor de la estrategia depende a su vez del valor de la cartera, por lo que, para que la estrategia crezca exactamente a la tasa γ, el valor de la cartera de títulos con riesgo debe mantenerse constante.

Además, para que la estrategia pueda considerarse de protección, su valor debe presentar un mínimo positivo, es decir, no puede descender jamás por debajo

(4) En efecto, tenemos $V(1,0) = 1$, $S_0 = 1$ y $\tau = 0$, por lo que $V(1,0) = c_1 + c_2 = 1$, justificándose así las igualdades [7] y [8].

de un cierto valor positivo conocido previamente. Se demuestra[5] que la estrategia presenta un valor mínimo solamente si $\gamma < r$. En este trabajo nos limitamos al estudio del caso $\gamma = 0$ por ser el que posteriormente permite relacionar la estrategia de invariabilidad temporal con una estrategia basada en opciones de intercambio. En el apartado 5 se explica el significado de esta hipótesis.

Siendo $\gamma = 0$, el valor mínimo de la estrategia se alcanza cuando la cartera de riesgo toma el siguiente valor:

$$s^* = \left[\frac{2r(1-c)}{\sigma^2 c}\right]^{\frac{\sigma^2}{\sigma^2+2r}} \qquad [10]$$

Por otra parte, la condición necesaria de segundo orden para la existencia de un mínimo[6] requiere que:

$$0 < c < 1 \qquad [11]$$

Puesto que *la estrategia* $\gamma = 0$ es la que se utiliza en el resto de este trabajo, resumimos a continuación sus *características principales*.

Haciendo $\gamma = 0$ en [3] y [4] , resulta:

$$\alpha_1 = 1 \qquad [12]$$

$$\alpha_2 = -2r / \sigma^2 \qquad [13]$$

Introduciendo la notación:

$$\Omega \equiv \frac{2r}{\sigma^2} \qquad [14]$$

la función del valor de la estrategia en el presente caso es:

$$V(s,c,\Omega) = c \cdot s + (1-c) \cdot s^{-\Omega} \qquad [15]$$

Se demuestra[7] que la proporción a invertir en la cartera de riesgo es:

$$f\,(s,c,\Omega) = \frac{c \cdot s - \Omega \cdot (1-c) \cdot s^{-\Omega}}{c \cdot s + (1-c) \cdot s^{-\Omega}} \qquad [16]$$

invirtiéndose el resto del presupuesto en el título libre de riesgo.

La relación entre los valores de una estrategia de variable no normalizada y su correspondiente estrategia de variable normalizada es inmediata. Teniendo en cuenta que S designa el valor, en un momento cualquiera posterior al inicial, de una cartera de riesgo cuyo valor inicial es S_0 y s (= S / S_0) indica la variable normalizada correspondiente, puede escribirse:

$$V\,(S,c_1,c_2,r,\sigma) = S_0 \cdot V\,(s,c,\Omega) \qquad [17]$$

(5) Véase Brennan y Schwartz (1988), págs. 290-297.

(6) Véase Brennan y Schwartz (1988), pág. 293.

(7) La expresión general [Brennan y Schwartz (1988) pág. 288] es:

$$f\,(s,c_1,c_2,\gamma,r,\sigma) = w\,(s,c_1,c_2,\gamma,r,\sigma) \cdot \alpha_1 + [\,1 - w\,(s,c_1,c_2,\gamma,r,\sigma)\,] \cdot \alpha_2$$

donde $w(\cdot) = \dfrac{c_1 \cdot s^{\alpha_1}}{c_1 \cdot s^{\alpha_1} + c_2 \cdot s^{\alpha_2}}$.

Puesto que en el caso que nos ocupa $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -\Omega$ y $\gamma = 0$, es inmediato obtener el resultado del texto.

2. Invariabilidad temporal por medio de una opción de venta americana perpetua

2.1. Estrategia de protección con una opción de venta americana perpetua

En este apartado se construye una estrategia de invariabilidad temporal que consiste en proteger la cartera de riesgo con una opción de venta americana perpetua, es decir, cuyo vencimiento se sitúa en el infinito. Esta nueva estrategia resulta equivalente a la estrategia de Brennan y Schwartz para $\gamma = 0$, a la vez que facilita la interpretación económica de la protección de invariabilidad temporal. Con respecto al pago de intereses y dividendos se aplica lo ya expuesto para el modelo de Brennan y Schwartz.

Supongamos que la opción se establece sobre una cartera de riesgo, cuyo valor se representa por S, y sean:

G(S,EX,Ω) : valor de la opción de venta americana perpetua;

EX : precio de ejercicio;

$\hat{S}$: máximo valor de la cartera de riesgo para el que resulta preferible ejercer la opción de venta americana que continuar manteniéndola sin ejercer,

r : tipo de interés del título libre de riesgo,

σ^2 : varianza de la rentabilidad de la cartera de riesgo.

Merton (1973)[8] demuestra que:

$$G\,(S,EX,\Omega) = \frac{EX}{1+\Omega}\cdot\left[\frac{(1+\Omega)\cdot S}{\Omega\cdot EX}\right]^{-\Omega} \qquad [18]$$

y

$$\hat{S} = \frac{\Omega\cdot EX}{1+\Omega} \qquad [19]$$

donde Ω tiene el significado expresado en [14].

En consecuencia, el valor de la estrategia es:

$$Y\,(S,EX,\Omega) = S + G\,(S,EX,\Omega) \qquad [20]$$

Sean:

$$s = \frac{S}{S_0} \qquad [21]$$

y

$$\varepsilon = \frac{EX}{S_0} \qquad [22]$$

es decir, s y ϵ son, respectivamente, el valor de la cartera de riesgo y el precio de ejercicio que se obtienen al normalizar la variable cartera de riesgo en el instante inicial de la estrategia. Teniendo en cuenta la proporcionalidad entre los valores de las opciones cuando los precios de los activos subyacentes y los precios de ejercicio correspondientes son proporcionales[9], puede escribirse:

(8) Véase Merton (1973), citado por Merton (1990), págs. 299-300. Mientras Merton utiliza la notación G (S, ∞, EX), en este trabajo se opta por no explicitar ∞ en los argumentos de la función al no aparecer ninguna función G(·) en la que el horizonte temporal sea otro. En cambio, se incluye Ω, porque en posteriores transformaciones de esta opción desaparece como argumento de la misma.

$$S + G(S,EX,\Omega) = S_0 \cdot [s + G(s,\varepsilon,\Omega)] \quad [23]$$

lo que, teniendo en cuenta las notaciones establecidas, equivale a:

$$Y(S,EX,\Omega) = S_0 \cdot Y(s,\varepsilon,\Omega) \quad [24]$$

igualdades que facilitan la comparación de esta estrategia con la estrategia de Brennan y Schwartz con variable normalizada. Salvo si se indica explícitamente lo contrario, en el resto del trabajo se utilizan estrategias con variable normalizada, por la facilidad que representa trabajar con el coeficiente c en lugar de los dos coeficientes c_1 y c_2.

2.2. Proporcionalidad de valores con la estrategia de Brennan y Schwartz

El apéndice matemático recoge la demostración de la siguiente proposición, formalmente recogida en la ecuación [27]:

> El valor de una estrategia de invariabilidad temporal Brennan-Schwartz con tasa de crecimiento igual a cero ($\gamma = 0$) es proporcional al de una estrategia formada por la misma cartera de riesgo más una opción de venta americana perpetua sobre la misma.
>
> El precio de ejercicio de esta opción es el valor mínimo de la estrategia Brennan-Schwartz más el valor de una opción de venta americana perpetua sobre la cartera de riesgo, para un valor de esta cartera igual al valor mínimo de la estrategia Brennan-Schwartz. La constante de proporcionalidad es la propia constante c que aparece en la estrategia Brennan-Schwartz.

Esto es, si se escoge ϵ de forma que se cumpla la igualdad:

$$\varepsilon = \hat{s} + G(\hat{s},\varepsilon,\Omega) \quad [25]$$

siendo:

$$\hat{s} = \left[\frac{1-c}{c}\cdot\Omega\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} \quad [26]$$

es decir, $\hat{s}$ –valor de la cartera de riesgo que hace óptimo el ejercicio de la opción perpetua– se iguala a s* –valor mínimo de la estrategia Brennan-Schwartz [10]–y, teniendo, además, en cuenta el cambio de la notación $\Omega = 2r / \sigma^2$ [14], entonces:

$$\frac{V(s,c,\Omega)}{s+G(s,\varepsilon,\Omega)} = c \quad [27]$$

Esta igualdad, expresada en función de la variable normalizada, se cumple también cuando se trabaja con variables no normalizadas.

(9) Obsérvese que, si no se cumple la proporcionalidad, aparece una clara oportunidad de arbitraje. Merton (1973), (teorema 8.6.) demuestra esta propiedad para las opciones de compra americanas.

Entre c y ϵ existe la siguiente relación[10]: $$\varepsilon = \frac{1+\Omega}{\Omega} \cdot \left[\frac{\Omega(1-c)}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} \quad [28]$$

2.3. Análisis de la composición de las estrategias

En este apartado se analiza la composición –entendiendo como tal la distribución porcentual entre título libre de riesgo y cartera de riesgo– de las dos estrategias consideradas, poniendo de manifiesto que ambas presentan idéntica composición.

Por lo que se refiere a la *estrategia Brennan-Schwartz,* la proporción invertida en cartera de riesgo es según [16]:

$$f(s,c,\Omega) = \frac{c \cdot s - \Omega \cdot (1-c) \cdot s^{-\Omega}}{c \cdot s + (1-c) \cdot s^{-\Omega}}$$

siendo, por tanto, la proporción invertida en título libre de riesgo:

$$1 - f(s,c,\Omega) = \frac{(1-c) \cdot s^{-\Omega} \cdot (1+\Omega)}{c \cdot s + (1-c) \cdot s^{-\Omega}} \quad [29]$$

Para analizar la *estrategia de protección con la opción de venta americana perpetua* hay que partir del planteamiento de Black y Scholes (1973) según el cual, por la vía sintética, puede reproducirse el comportamiento de una opción mediante una combinación variable en el tiempo[11] entre la cartera de riesgo sobre la que se trata de aplicar la opción y título libre de riesgo. Conviene, por otra parte, tener en cuenta que las opciones de este tipo no se negocian actualmente en los mercados, por lo que sólo pueden conseguirse por la vía sintética. Una opción sintética se construye mediante Δ acciones o "unidades de cartera" y una inversión en título libre de riesgo igual al valor de la opción menos el valor de las Δ acciones o "unidades de cartera", siendo Δ la derivada del valor de la opción respecto del valor de la acción o cartera (δG / δs). Teniendo en cuenta [18], [25] y [26][12], puede escribirse:

$$G(s,\varepsilon,\Omega) = \frac{1-c}{c \cdot s^{\Omega}} \quad [30]$$

y a partir de aquí: $$\Delta = \frac{\delta G}{\delta s} = \frac{-\left[\Omega \cdot (1-c) \cdot s^{-1-\Omega}\right]}{c} \quad [31]$$

---

(10) Esta relación es válida para s variable normalizada. En otro caso es: $EX = \frac{1+\Omega}{\Omega} \cdot \left[\frac{\Omega \cdot c_2}{c_1}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}}$

(11) Esta combinación debe modificarse en la medida en que varía el valor de la cartera, lo cual ocurre en el tiempo, pero no por su mero transcurso, sino por el hecho de que las modificaciones del valor de la cartera tienen una dimensión temporal.

(12) En efecto, sustituyendo [26] en [25], tenemos: $\varepsilon = \left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right] \cdot \left[\frac{1-c}{c} \cdot \Omega\right]^{1/(1+\Omega)}$

y, sustituyendo el valor de ϵ obtenido en [18], se llega a la igualdad [30], tras realizar algunas operaciones.

Por tanto: $$\Delta \cdot s = -c^{-1} \cdot (1-c) \cdot \Omega \cdot s^{-\Omega} \qquad [32]$$

donde el signo negativo indica, como es habitual, posición *short*.

La inversión en título libre de riesgo a incluir en la opción sintética es:

$$G(s,EX,\Omega) - \Delta \cdot s = c^{-1} \cdot s^{-\Omega} \cdot (1-c) \cdot (1+\Omega) \qquad [33]$$

Puede, pues, afirmarse que la *estrategia de cartera de riesgo más opción de venta americana perpetua* tiene la siguiente composición:

a) Cartera de riesgo	$s - c^{-1} \cdot (1-c) \cdot \Omega \cdot s^{-\Omega}$
b) Título libre de riesgo	$c^{-1} \cdot (1-c) \cdot (1+\Omega) \cdot s^{-\Omega}$
	$s + c^{-1} \cdot (1-c) \cdot s^{-\Omega}$

A partir de aquí se comprueba fácilmente que la composición porcentual de esta estrategia es la misma que la de la estrategia Brennan-Schwartz. En efecto, la proporción invertida en cartera de riesgo es:

$$\theta\,(s,c,\Omega) = \frac{s - c^{-1} \cdot (1-c) \cdot \Omega \cdot s^{-\Omega}}{s + c^{-1} \cdot (1-c) \cdot s^{-\Omega}} \qquad [34]$$

y, multiplicando numerador y denominador por c, se halla de nuevo la antigua ecuación [16]:

$$\theta\,(s,c,\Omega) = \frac{c \cdot s - \Omega \cdot (1-c) \cdot s^{-\Omega}}{c \cdot s + (1-c) \cdot s^{-\Omega}}$$

por lo que: $$\theta\,(s,c,\Omega) = f\,(s,c,\Omega) \qquad [35]$$

De ahí resulta ya evidente la igualdad de las proporciones invertidas en título libre de riesgo por cada una de las estrategias, igualdad que, en cualquier caso, puede comprobarse siguiendo el mismo procedimiento.

2.4. Alternativas para iniciar una estrategia de protección de invariabilidad temporal

De cuanto se ha expuesto se desprende que una estrategia de protección de invariabilidad temporal sobre una cartera de riesgo igual a S_0 unidades monetarias en el momento inicial puede realizarse por dos vías:

a) Aportando $G(S_0,EX,\Omega)$, es decir, $S_0 \cdot G(1,\epsilon,\Omega)$, unidades monetarias – además de S_0, por supuesto– y distribuyendo la cifra $S_0 + S_0 \cdot G(1,\epsilon,\Omega)$ entre cartera de riesgo y título libre de riesgo, según las proporciones $f\,(s,c,\Omega)$ y $[\,1 - f\,(s,c,\Omega)\,]$, que deben reajustarse continuamente en el futuro al variar el valor de la cartera de riesgo.

b) Distribuyendo directamente la cifra de S_0 unidades monetarias según el criterio que se acaba de indicar, lo que equivale a seguir la estrategia propuesta por Brennan y Schwartz, reajustando la composición de la estrategia a lo largo del tiempo al igual que en a).

La principal diferencia entre una y otra alternativa radica en la forma en que se asume el coste de la protección. En la primera de ellas el coste de la protección es asumido aportando el valor de la opción. En la segunda aparece permanentemente un coste proporcional al valor de la estrategia. En efecto, la relación entre V (·) y [s + G (·)] vista en [27] puede expresarse también de la siguiente manera:

$$V(s,c,\Omega) = [\, s + G(s,\varepsilon,\Omega)\,] - (1\text{-}c)\cdot[\, s + G(s,\varepsilon,\Omega)\,] \qquad [36]$$

por lo que puede escribirse:

$$S_0\cdot V(s,c,\Omega) = S_0\cdot[\, s + G(s,\varepsilon,\Omega)\,] - (1\text{-}c)\cdot S_0\cdot[\, s + G(s,\varepsilon,\Omega)\,] \qquad [37]$$

que se interpreta como sigue:

Valor de la estrategia *sin* haber aportado el valor inicial de la opción	=	Valor de la estrategia *habiendo aportado* el valor inicial de la opción	–	*Coste* por *no* haber aportado el valor inicial de la opción

Puede, pues, interpretarse el *coeficiente (1-c)* como el *coste proporcional de la estrategia de protección*[13].

3. Opciones de intercambio

Las estrategias estudiadas hasta aquí garantizan que, en cifras absolutas, el valor de la inversión efectuada resulta sistemáticamente superior o igual a una cifra mínima conocida. A continuación estudiamos otra estrategia en la que el objetivo de la protección es garantizar que el valor de la inversión efectuada (activo) resulte sistemáticamente superior o igual a un pasivo o a una fracción del mismo, comportándose este pasivo –al igual que la inversión o activo– como una variable aleatoria. Tal es el caso de los fondos de pensiones en que el valor actual de su pasivo es función del tipo de interés de mercado. La protección requerida para garantizar un valor mínimo de la relación activo/pasivo la proporcionan las opciones de intercambio, estudiadas y valoradas fundamentalmente en el modelo de Margrabe (1978).

Una opción de intercambio sobre la fracción ϵ de una cartera P contra otra cartera S otorga a quien la posee el derecho a recibir $\epsilon\cdot P$ a cambio de S a su vencimiento, si la opción es europea, o entre el momento de su suscripción y su vencimiento, si es americana. Como es lógico, llegado el vencimiento se ejercitará la opción si $\epsilon\cdot P > S$. Una opción de intercambio puede interpretarse como una opción de compra sobre $\epsilon\cdot P$ con S como precio de ejercicio o como una opción de venta sobre S con $\epsilon\cdot P$ como precio de ejercicio.

Margrabe pone de manifiesto que para valorar una opción de intercambio (precio de ejercicio aleatorio) puede aplicarse el modelo de Black y Scholes (precio de ejercicio fijo) efectuando las siguientes transformaciones en las variables de este modelo:

- se considera como cartera de riesgo el cociente entre la cartera S y la cartera P;
- el título libre de riesgo queda representado por la unidad relativa que resulta del cociente de la cartera P consigo misma;

(13) Brennan y Schwartz (1988) realizan por otro camino la misma interpretación. Tras demostrar que:

$$\lim_{s\to\infty} [V(s) / s] = c$$

afirman: "en consecuencia, (1-c) puede interpretarse como el coste proporcional de la estrategia de protección en caso de resultados favorables". (*op.cit.*, págs. 292-293).

– el tipo de interés que corresponde a este título libre de riesgo es cero;

– la desviación típica que hay que aplicar es la de la rentabilidad de la cartera de riesgo relativa *S/P*.

Se trata de que el cociente entre *S* y *P* sea superior a una determinada constante, que Margrabe considera implícitamente igual a la unidad y que a efectos de éste trabajo conviene que pueda tomar un valor cualquiera, designado por ϵ. Luego, es evidente que este cociente es la cartera de riesgo. Por otra parte, dado que nos interesamos por el valor relativo de la estrategia, el título libre de riesgo no puede ser sino la relación del título (o cartera) a recibir consigo mismo. Finalmente, el interés correspondiente a este título libre de riesgo es cero[14].

Se obtiene así el valor de la opción de intercambio para cada unidad monetaria de la cartera que es posible recibir. Para conocer el valor de la opción sobre *P* unidades monetarias de esta cartera basta multiplicar por *P* el valor anteriormente obtenido.

Para poder introducir en un modelo una estrategia de invariabilidad temporal e intercambio, hay que deducir, a continuación, la expresión del valor de la opción de venta americana perpetua para el caso de intercambio, aplicando las transformaciones mencionadas.

Considérese una opción que permite a su propietario intercambiar una cartera, cuyo valor representa *S*, por la fracción ϵ de otra cartera, cuyo valor viene indicado por *P*, en cualquier momento desde su constitución hasta el infinito, siendo iguales los valores de ambas carteras en el momento inicial, es decir, $S_0=P_0$. Evidentemente, puede concebirse como una opción de venta sobre *S* con $\epsilon \cdot P$ como precio de ejercicio[15]. Por tanto, para valorar esta opción hay que aplicar los cambios indicados al final del apartado anterior sobre la expresión del valor de una opción de venta americana perpetua. Tomamos, pues, como cartera de riesgo, Γ, el cociente entre *S* y *P*:

$$\Gamma = \frac{S}{P} \qquad [38]$$

Al igualar a cero el tipo de interés y puesto que $\Omega = 2r / \sigma$, resulta:

$$\Omega = 0 \qquad [39]$$

Se toma ϵ como precio de ejercicio relativo ($\epsilon \cdot P / P$).

Por tanto, el valor de la opción por unidad monetaria de la cartera *P* es:

$$\lim_{\Omega \to 0} G(\Gamma, \varepsilon, \Omega) = lim_{\Omega \to 0} \frac{\varepsilon}{1+\Omega} \cdot \left[\frac{1+\Omega}{\Omega} \cdot \frac{\Gamma}{\varepsilon} \right]^{-\Omega} \qquad [40]$$

(14) En palabras del propio Margrabe (1978): "El tipo de interés de un préstamo sin riesgo, considerado en unidades del activo que se recibe en caso de ejercitarse la opción de intercambio, es cero en un mercado de competencia perfecta. El prestamista de una unidad de este activo exige como pago del principal la devolución de una unidad del mismo, no aplicando ningún interés sobre el préstamo, puesto que, en equilibrio, la revalorización del activo durante el período de existencia del crédito constituye la compensación por la inversión y el riesgo." (*op. cit.*, págs. 179-180).

(15) También puede concebirse como una opción de compra sobre $\epsilon \cdot P$ con *S* como precio de ejercicio. Aquí se estudia desde el punto de vista de una opción de venta, a fin de utilizar el mismo tipo de enfoque que en la parte precedente de este trabajo.

Resolviendo este límite[16], se obtiene: $\lim_{\Omega \to 0} G(\Gamma, \varepsilon, \Omega) = \varepsilon$ [41]

por lo que el valor total de la opción referido a las *P* unidades monetarias de valor de la cartera pasiva es:

$$G(S, \varepsilon \cdot P) = \varepsilon \cdot P \qquad [42]$$

Adaptando a este caso la relación entre ϵ y c que proporciona [28], resulta:

$$\lim_{\Omega \to 0} \varepsilon = lim_{\Omega \to 0} \frac{1+\Omega}{\Omega} \cdot \left[\frac{\Omega \cdot (1-c)}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} \qquad [43]$$

y, resolviendo este límite[17], se obtiene: $\lim_{\Omega \to 0} \varepsilon = \dfrac{1-c}{c}$ [44]

Luego, puede escribirse: $G(\Gamma, c) = \dfrac{1-c}{c}$ [45]

Por otra parte, a partir de [19] es inmediato deducir que el máximo valor de Γ para el que se ejerce la opción perpetua es:

$$\hat{\Gamma} = 0 \qquad [46]$$

de donde se desprende que: $\hat{S} = 0$ [47]

Resulta, pues, que el valor de una opción perpetua de intercambio es igual al valor del activo a recibir y que esta opción sólo se ejercita en caso de que el valor del activo a entregar sea igual a cero.

Los resultados que acaban de obtenerse [$\hat{S} = 0$ y $G(S, \epsilon \cdot P) = \epsilon \cdot P$] también pueden deducirse siguiendo otro camino. Margrabe ha demostrado que el ejercicio anticipado de una opción de intercambio no es óptimo[18]. En efecto, el valor de una cartera formada por $\epsilon \cdot P$ y la venta *short* de S es $[\epsilon \cdot P - S]$, mientras que la opción de intercambio da derecho a Máx $[0, \epsilon \cdot P - S]$, siendo evidente que esta posición domina a la anterior. Sin embargo, el ejercicio anticipado de la opción –que evidentemente requiere $\epsilon \cdot P > S$– transforma la segunda posición en la primera, por lo que no resulta óptimo. Debe, no obstante, hacerse una excepción para el caso en que $S = 0$, en el que ambas posiciones devienen iguales[19]. Por tanto, una opción de intercambio se ejercita *anticipadamente* sólo en el caso trivial

(16) Véase el apéndice matemático (apartado 8.2.). Este mismo resultado se obtiene a partir de la fórmula de Margrabe, previamente adaptada al tipo de opción de intercambio que aquí se considera, cuando el vencimiento tiende a infinito. Véase Tarrazón y Montllor (1993b), expresión [46].

(17) Véase el apéndice matemático (apartado 8.3.). Este mismo resultado se obtiene siguiendo el camino alternativo indicado en la nota 16. Véase Tarrazón y Montllor (1993b), expresión [54].

(18) Véase Margrabe (1978), págs. 180-181. Como el propio Margrabe señala, este resultado no contradice la conclusión de Merton (1973) sobre la posibilidad del ejercicio anticipado óptimo de las opciones americanas, pues Merton se refiere a opciones de precio de ejercicio fijo y Margrabe a opciones de precio de ejercicio aleatorio.

(19) Cuando el valor de mercado de un activo deviene exactamente igual a cero, se considera que no existe ninguna posibilidad de que en el futuro se recupere, ya que, si fuese así, su valor debería ser positivo, aunque, en determinados casos, pudiera ser prácticamente nulo. Véase Brealey y Myers (1991), pág. 496.

en que S = 0, mientras que, si la opción es perpetua, *sólo* se ejercita si S = 0. Se infiere también de aquí que, en una hipótesis de *caeteris paribus,* siempre tendrá mayor valor una opción de intercambio cuyo vencimiento esté más alejado que una opción de intercambio cuyo vencimiento se halle más próximo, pues en el vencimiento la situación corresponde a una de las dos posiciones, cero o [$\epsilon \cdot P$-S], mientras que, cuando éste todavía no se ha producido, puede optarse a la mayor de ambas.

Es evidente que el valor de una opción de intercambio nunca puede superar el valor del activo a recibir, $\epsilon \cdot P$, aunque en algunos casos puede alcanzarlo, por ejemplo, cuando S = 0. Supongamos una opción de intercambio cuyo valor es inferior a $\epsilon \cdot P$, lo que por otra parte implica S > 0. Puesto que el valor de una opción de intercambio es más elevado cuanto más lejano se sitúa su vencimiento, puede hacerse crecer el valor de la opción que nos ocupa alargando su vencimiento. De aquí se deriva que el vencimiento de la opción considerada no es el infinito. Luego, el valor de una opción de intercambio cuando S > 0 es inferior al valor del activo a recibir, $\epsilon \cdot P$, si y sólo si su vencimiento es inferior al infinito. Puede, pues, afirmarse *sensu contrario* que el valor de una opción de intercambio cuyo vencimiento se sitúa en el infinito es igual al valor del activo que es posible recibir en caso de ejercitarse la opción.

4. Estrategia de invariabilidad temporal con una opción perpetua de intercambio

Una vez conocido el valor de la opción perpetua de intercambio resulta inmediato hallar el valor de la estrategia que consiste en añadir dicha opción a la cartera de riesgo. En términos absolutos, el valor de esta estrategia es:

$$Y(S,\varepsilon,P) = S + \varepsilon \cdot P \qquad [48]$$

y en términos relativos:

$$y(\Gamma,\varepsilon) = \Gamma + \varepsilon \qquad [49]$$

valores que, teniendo en cuenta [44], pueden también expresarse en función de c en lugar de ϵ:

$$Y(S,\varepsilon,P) = S + \frac{1-c}{c} \cdot P \qquad [50]$$

$$y(\Gamma,\varepsilon) = \Gamma + \frac{1-c}{c} \qquad [51]$$

Ciertamente no se negocian en los mercados financieros opciones perpetuas de intercambio, por lo que, para aplicar esta estrategia, resulta necesario crear la opción por la vía sintética. Sin embargo, en este caso la composición de la opción sintética es trivial, ya que consiste sencillamente en invertir el valor de la opción en la cartera a recibir en caso de producirse el intercambio. En efecto, el coeficiente Δ visto en [31], que indica las unidades de cartera de riesgo en la opción sintética de intercambio, es nulo:

$$\Delta = \frac{\delta G}{\delta \Gamma} = 0 \qquad [52]$$

Por tanto, el valor total de la opción en el momento inicial, $\epsilon \cdot P_0$, debe invertirse en la cartera P, inversión a mantener permanentemente, que no precisa reajustes en el futuro.

De cuanto se ha expuesto en este apartado se desprende que, para iniciar una estrategia de invariabilidad temporal con una opción perpetua de intercambio, hay que invertir S_0 unidades en la cartera de riesgo del activo y $\epsilon \cdot P_0$ unidades en una cartera que presenta las mismas propiedades que el pasivo, siendo:

$$S_0 = P_0 \qquad [53]$$

De [48] se deduce que esta estrategia no requiere reajustes a lo largo del tiempo. Por otro lado, es evidente que su valor relativo en cualquier momento es igual o superior al precio de ejercicio relativo de la opción de intercambio:

$$\frac{S + \varepsilon \cdot P}{P} \geq \varepsilon \qquad [54]$$

5. La estrategia de invariabilidad temporal de Brennan y Schwartz aplicada al intercambio de carteras

Se aplica, a continuación, la estrategia de invariabilidad temporal de Brennan y Schwartz para $\gamma = 0$ al intercambio de carteras. En el presente caso, la cartera de riesgo relativa (Γ) consiste en el cociente entre el activo y el pasivo de un fondo de pensiones. Adoptamos la hipótesis $\gamma = 0$ por considerar que no parecen existir razones que justifiquen exigir, a través de la estrategia de inversión, una tasa de crecimiento sistemático del cociente activo/pasivo. La adaptación que se realiza en este apartado implica efectuar los cambios de variables, expuestos en el apartado 3, que permiten transformar una opción ordinaria en una opción de intercambio y, por extensión, cualquier relación entre variables financieras ordinarias en una relación entre variables financieras de intercambio. En consecuencia, sustituyendo en [15] s por Γ (= S / P)[20] y haciendo $\Omega = 0$ (por $r = 0$), se obtiene el siguiente *valor de la estrategia relativa,* esto es, por unidad monetaria de P:

$$v(\Gamma, c) = c \cdot \Gamma + (1-c) \qquad [55]$$

siendo su *valor en términos absolutos*:

$$P \cdot v(\Gamma, c) = c \cdot S + (1-c) \cdot P \qquad [56]$$

El valor relativo de esta estrategia es en cualquier caso superior a (1-c). En efecto:

$$\frac{c \cdot S + (1-c) \cdot P}{P} \geq (1-c) \qquad [57]$$

Aplicando las mismas transformaciones en [16], ecuación que indica la proporción de la inversión en cartera de riesgo en el valor absoluto de la estrategia en el caso estándar (no intercambio), se obtiene:

(20) Recuérdese que para llegar a [15] se había normalizado previamente la variable cartera de riesgo, haciendo $s = S/S_0$, por lo que $s_0 = 1$. La variable Γ correspondiente a la cartera de riesgo relativa viene normalizada, puesto que $\Gamma_0 = 1$, como consecuencia de la igualdad contable inicial $S_0 = P_0$.

$$f(\Gamma,c)=\frac{c\cdot\Gamma}{c\cdot\Gamma+(1-c)} \qquad [58]$$

que, a su vez, indica la proporción de la cartera de riesgo en el valor total de la estrategia de intercambio. Multiplicando numerador y denominador por *P*, esta proporción puede expresarse también de la siguiente manera:

$$f(S,P,c)=\frac{c\cdot S}{c\cdot S+(1-c)\cdot P} \qquad [59]$$

siendo evidente que la proporción de *P* en el valor total de la estrategia viene dada por [1 - f (*S,P,c*)][21].

Al pasar a estrategias de intercambio se mantiene la proporcionalidad ya detectada al comparar la estrategia de Brennan y Schwartz con la estrategia de cartera de riesgo más opción de venta americana perpetua. En efecto, dividiendo [55] por [51], se obtiene:

$$\frac{v(\Gamma,c)}{y(\Gamma,\varepsilon)}=\frac{c\cdot\Gamma+(1-c)}{\Gamma+\dfrac{1-c}{c}}=c \qquad [60]$$

En consecuencia, podemos considerar que tanto a partir de la *opción perpetua de intercambio aplicada sobre la cartera de riesgo,* como a partir de la *adaptación de la estrategia de invariabilidad temporal de Brennan y Schwartz al caso de intercambio* hemos obtenido *dos variantes* de una misma *estrategia de invariabilidad temporal e intercambio.* Proponemos denominarla *estrategia de protección proporcional.*

Esta estrategia presenta la interesante propiedad de no requerir reajustes a lo largo del tiempo, extremo particularmente relevante, que la distingue de otras posibles estrategias de inversión. De la simple lectura de la igualdad [55] se desprende que la derivada del valor relativo de la estrategia v (·) con respecto a la cartera relativa Γ es constante e igual a *c*. Luego, la cartera en que esta estrategia se traduce se compone de modo permanente de *c* unidades de *S* y (1-*c*) unidades de *P*. Esta composición origina automáticamente que la proporción de la estrategia invertida en cartera de riesgo sea la expresada por la ecuación [58]. Idéntica conclusión se alcanza a partir de [56] y [59].

6. La estrategia de protección proporcional

6.1. Las variantes de la estrategia de protección proporcional

Como se ha señalado en la introducción, el principal propósito de este trabajo es investigar las características que debe reunir una estrategia de inversión de invariabilidad temporal e intercambio. Tras el análisis de la *estrategia de invariabilidad temporal de Brennan y Schwartz* y de *otra estrategia,* también de invariabilidad temporal y de valor proporcional a la anterior, *consistente en añadir una opción de venta americana perpetua a la cartera de riesgo,* hemos *adaptado ambas estrategias al caso de intercambio.* El paralelismo existente entre los resul-

(21) Se demuestra fácilmente que las proporciones de las carteras son las mismas en el caso en que se aplica la opción perpetua de intercambio. Basta tener en cuenta la proporcionalidad entre los valores de ambas estrategias, que se demuestra a continuación.

tados alcanzados, tal como muestra el apartado precedente, conduce a considerar las adaptaciones realizadas no como diferentes estrategias, sino como variantes de una misma estrategia, denominada *estrategia de protección proporcional*. En este apartado se demuestra la confluencia de ambas variantes, se estudia el coste que conlleva implementarlas y se comentan las características de la estrategia de protección proporcional en relación con el proceso estocástico de la cartera de riesgo.

Considérese una entidad financiera que debe invertir un pasivo igual a P_0 unidades monetarias en el momento actual. El valor de este pasivo se supone función de los tipos de interés del mercado financiero, comportándose, por tanto, como una variable aleatoria. Se fija como objetivo de protección que la relación entre activo y pasivo no se sitúe en ningún momento por debajo de un coeficiente ϵ antes de considerar los efectos del coste de la protección. Esta protección puede realizarse con una opción perpetua de intercambio o bien aplicando la estrategia de Brennan y Schwartz adaptada al caso de intercambio. Tanto en una como en otra alternativa la inversión total se distribuye entre una cartera de títulos con riesgo y un activo libre de riesgo. Éste, dadas las circunstancias, debe consistir en un activo idéntico al pasivo, que experimentará lógicamente las mismas variaciones aleatorias en su valor.

Analicemos qué ocurre en caso de optar por la estrategia de la opción de intercambio. Puesto que en los mercados financieros no se negocian opciones de este tipo, la opción de intercambio debe crearse sintéticamente. De acuerdo con lo expuesto en el apartado 4, si el valor actual del pasivo es P_0, es preciso invertir $\epsilon \cdot P_0$ unidades monetarias en un activo idéntico a este pasivo. Ésta es la inversión de protección u opción sintética de intercambio. La inversión principal consiste en P_0 unidades monetarias que se destinan a la adquisición de una cartera de títulos con riesgo, cuyo valor inicial se representa por S_0, siendo lógicamente $S_0 = P_0$. Por tanto, esta variante de la estrategia de protección proporcional requiere una inversión total inicial igual a $S_0 + \epsilon \cdot P_0$. Es evidente que en todo momento se cumple la desigualdad [54], $[(S + \epsilon \cdot P) / P] \geqslant \epsilon$. La necesidad de realizar una inversión adicional igual a $\epsilon \cdot P$ puede constituir un obstáculo considerable.

Un camino que permite evitar esta inversión adicional viene dado por la aplicación de la estrategia de Brennan y Schwartz adaptada al intercambio, estrategia que, como recoge el apartado 5, consiste en distribuir el presupuesto de inversión entre una proporción c, que se invierte en cartera de riesgo, y una proporción $(1\text{-}c)$, que se invierte en un activo de comportamiento idéntico al pasivo, que en este caso desempeña el papel de activo libre de riesgo. En consecuencia, el presupuesto de P_0 unidades monetarias se distribuye entre $c \cdot P_0$ unidades monetarias en cartera de riesgo –siendo $c \cdot P_0 = c \cdot S_0$ por lo anteriormente expuesto– y $(1\text{-}c) \cdot P_0$ unidades monetarias en el activo de comportamiento idéntico al pasivo. En cualquier momento el valor de la inversión efectuada es $[c \cdot S + (1\text{-}c) \cdot P]$, cumpliéndose, pues, la desigualdad [57]:

$$\frac{c \cdot S + (1-c) \cdot P}{P} \geq (1-c)$$

Además, cuando se considera la opción sintética de valor $\epsilon \cdot P$ como una aportación adicional que forma parte del pasivo a proteger, la estrategia con la opción de intercambio proporciona exactamente la misma protección que la estrategia de Brennan y Schwartz adaptada al intercambio, por lo que la relación entre activo y pasivo ampliado es:

$$\frac{S+\varepsilon\cdot P}{P\cdot(1+\varepsilon)}$$

pues, teniendo en cuenta que por [44] $\epsilon = (1\text{-}c) / c$, se obtiene:

$$\frac{S+\varepsilon\cdot P}{P\cdot(1+\varepsilon)}=\frac{c\cdot S+(1-c)\cdot P}{P} \qquad [61]$$

es decir, los cocientes activo/pasivo de una y otra estrategia resultan iguales.

Por otro lado, la variante basada en la estrategia de Brennan y Schwartz equivale a invertir $c\cdot P_0$ unidades monetarias en una cartera de riesgo y protegerla con la correspondiente opción perpetua de intercambio, cuyo valor ahora es de $(1\text{-}c)\cdot P_0$ (= $[(1\text{-}c)/c]\cdot c\cdot P_0$) unidades monetarias.

En consecuencia, la *estrategia de protección proporcional* debe aplicarse preferentemente a partir de la *variante basada en la estrategia de Brennan y Schwartz,* quedando la variante basada en la opción sintética de intercambio principalmente como una ayuda para la interpretación del significado de la estrategia[22]. Nótese que ambas variantes proporcionan la misma protección proporcional, que es la que cabe considerar relevante para un fondo de pensiones, por lo que no parece que pueda tener interés para una entidad de este tipo ampliar su pasivo a fin de implementar la variante estratégica de la opción perpetua.

6.2. *El coste de la estrategia de protección proporcional*

La aplicación de esta estrategia obliga a asumir un coste de protección. Si se opta por la variante basada en la opción perpetua de intercambio, el coste consiste en la aportación adicional de $\epsilon\cdot P_0$ unidades monetarias en el momento inicial. Si se escoge, como parece más razonable, la variante basada en la estrategia de Brennan y Schwartz adaptada al intercambio, aparece un coste proporcional igual, en todo momento, al producto de (1-c) por el valor de la estrategia. En efecto, adaptando la igualdad [37] a este caso, puede escribirse:

$$c\cdot S+(1-c)\cdot P=\left[S+\frac{1-c}{c}\cdot P\right]-(1-c)\cdot\left[S+\frac{P\cdot(1-c)}{c}\right] \qquad [62]$$

expresión que, nuevamente, indica que el valor de la estrategia sin haber aportado el valor inicial de la opción es igual al valor de la estrategia habiendo aportado el valor inicial de la opción, menos el coste por no haber efectuado dicha aportación. Obsérvese cómo este coste es la proporción $(1\text{-}c)$ del valor de la estrategia, mientras $(1\text{-}c)$ es a la vez el valor mínimo relativo de la variante basada en la estrategia de Brennan y Schwartz.

Por tanto, se trata de elegir entre el coste absoluto $\epsilon\cdot P$ y el coste proporcional $(1\text{-}c)$, obteniéndose en ambos casos la misma protección proporcional, de acuerdo con lo indicado en el apartado 6.1., donde nos inclinamos por aplicar la variante basada en la estrategia de Brennan y Schwartz, para evitar una ampliación del

(22) La estrategia de protección proporcional puede deducirse también transformando el modelo de opciones de intercambio de Margrabe (1978) en un modelo de invariabilidad temporal. Por otra parte, esta estrategia resulta equivalente a la *constant proportion portfolio insurance* relativa cuando se adopta un valor del multiplicador igual a la unidad . Véase Tarrazón (1992) y Tarrazón y Montllor (1993b).

pasivo que no contribuye a aumentar la protección proporcional. En el apéndice matemático se estudia la relación entre ϵ y c.

6.3. El valor de la estrategia de protección proporcional y el proceso estocástico de la cartera de riesgo relativa

Quizá uno de los aspectos más interesantes de la estrategia de protección proporcional viene dado por su relación con el proceso estocástico que sigue la cartera de riesgo relativa, *S/P*. Tomemos como punto de referencia la variante correspondiente al modelo de Brennan y Schwartz, en la que el valor relativo de la estrategia queda recogido en la expresión:

$$c \cdot \frac{S}{P} + (1-c)$$

Se observa que dicho valor es efectivamente función del proceso estocástico seguido por *S/P*. Sin embargo, la protección proporcional (1-*c*) no depende del valor que tome *S/P*, con lo que nos hallamos ante una *protección relativa independiente* tanto de la *volatilidad de dicha cartera de riesgo relativa* como de las *oscilaciones del tipo de interés;* en otras palabras, independiente de dos de los factores más significativos y difíciles de controlar del riesgo de las estrategias de protección de carteras. Esta característica, propia de la estrategia de protección proporcional, es una de las particularidades relevantes que la distingue.

7. Conclusiones: la aplicación de la estrategia de protección proporcional

En este trabajo presentamos la *estrategia de protección proporcional* como estrategia de inversión básica de un fondo de pensiones por cumplir las propiedades de *invariabilidad temporal e intercambio.* Se trata de una estrategia que ofrece una protección exenta de componentes especulativos, siendo la más adecuada para guiar *sistemáticamente* las inversiones de entidades que, como los fondos de pensiones, cuentan con un horizonte de inversión no sujeto a limitaciones[23].

Para aplicar la estrategia de protección proporcional a las inversiones de un fondo de pensiones debe seguirse la siguiente secuencia de pasos:

1) En primer lugar, hay que fijar P_0, el presupuesto a invertir, que es función de las aportaciones realizadas al plan de pensiones e integradas en un fondo de pensiones, que las gestiona.

2) A continuación, ha de analizarse cómo se forma el valor de este pasivo o deuda del fondo de pensiones, cuya estructura depende tanto de las características de la población acogida al plan de pensiones gestionado, como del tipo de prestaciones que éste cubra.

3) Una vez establecida la naturaleza del pasivo, se busca un activo de comportamiento idéntico al de este pasivo o, lo que va a resultar mucho más habitual, se crea utilizando los instrumentos financieros adecuados.

(23) Este trabajo no aborda las adaptaciones o complementos que pudiera requerir la estrategia de protección proporcional por alteraciones de tipo demográfico que afecten al volumen de las pensiones gestionadas por el fondo.

4) Por otro lado, se elige una cartera de títulos con riesgo de comportamiento satisfactorio.

5) A fin de implementar la estrategia de inversión, se define el nivel de protección deseado para las inversiones del fondo de pensiones en los siguientes términos:

5.1) Relación entre activo total y pasivo: (1-c)

5.2) Relación entre el activo invertido en la cartera de riesgo y el pasivo que lo financia, ϵ, siendo:

$$\varepsilon = \frac{1-c}{c}$$

Es, obviamente, fundamental elegir adecuadamente el coeficiente de protección [ϵ o (1-c)], que es la variable exógena del modelo.

6) Por último, se distribuye P_0 entre la inversión en cartera de riesgo, igual a $c \cdot P_0$ unidades monetarias en el momento inicial, y el activo de comportamiento idéntico al pasivo, igual a $(1\text{-}c) \cdot P_0$ unidades monetarias, también en el momento inicial.

La *estrategia de protección proporcional no requiere,* pues, *reajustes a lo largo del tiempo,* siendo ésta otra de sus principales aportaciones. En cualquier caso, si las circunstancias aconsejasen, en un momento dado, disponer de una protección distinta a la que proporciona el coeficiente de protección adoptado, los responsables de la gestión del fondo de pensiones tan sólo han de modificar dicho coeficiente, con el consiguiente reajuste de la distribución de la inversión total entre cartera de riesgo y cartera de comportamiento idéntico al del pasivo.

Por otro lado, la *estrategia de protección proporcional* presenta una interesante propiedad en el orden macroeconómico, ya que, al no obligar a reajustes cuando varía el valor de la cartera de riesgo, *evita las presiones de la oferta* que otras estrategias de protección de carteras originan al bajar la bolsa. No se trata de que los gestores de un fondo de pensiones no puedan o no deban decidir la reducción de su posición en renta variable, si prevén un descenso en el mercado –lo que es sencillamente asumible como una especulación razonable–, sino que la propia estrategia no contiene en sí misma una decisión de venta por el hecho de que el mercado haya experimentado una bajada, al contrario de lo que ocurre con otras estrategias de protección de carteras.

8. Apéndice matemático

8.1. Demostración de la igualdad [27] del texto

Proposición:

Si se escoge ϵ de forma que se cumpla la igualdad:

$$\varepsilon = \hat{s} + G(\hat{s},\varepsilon,\Omega) \qquad [A.1]$$

siendo:

$$\hat{s} = \left[\Omega \cdot \frac{1-c}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} \qquad [A.2]$$

(valor mínimo de la estrategia Brennan-Schwartz según [10], tras introducir el cambio de notación indicado en [14]), entonces: $$\frac{V(s,c,\Omega)}{s+G(s,\varepsilon,\Omega)}=c \qquad [A.3]$$

Demostración:

Por [18] podemos escribir: $$G(s,\varepsilon,\Omega)=\frac{\varepsilon}{1+\Omega}\cdot\left[\frac{(1+\Omega)\cdot s}{\Omega\cdot\varepsilon}\right]^{-\Omega} \qquad [A.4]$$

Haciendo, en esta expresión, s = ŝ y sustituyendo ϵ por su valor según [19] en función de ŝ, resulta:

$$G(\hat{s},\varepsilon,\Omega)=\frac{\hat{s}}{\Omega} \qquad [A.5]$$

Sustituyendo en [A.1], se obtiene $$\varepsilon=\hat{s}\cdot\frac{1+\Omega}{\Omega} \qquad [A.6]$$

resultado que no es sino una sencilla transformación de [19], pero cuyo interés radica en que permite relacionar [A.1] con [19].

Sustituyendo el valor obtenido en [A.4] y operando, resulta:

$$G(\cdot)=\frac{\hat{s}}{\Omega}\cdot\left[\frac{s}{\hat{s}}\right]^{-\Omega} \qquad [A.7]$$

Por tanto: $$\hat{s}+G(\cdot)=\hat{s}+\frac{\hat{s}^{1+\Omega}}{\Omega\cdot s^{\Omega}} \qquad [A.8]$$

Sustituyendo [A.2] en [A.8], se obtiene:

$$\hat{s}+G(\cdot)=\hat{s}+\frac{\left[\Omega\cdot\frac{1-c}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}\cdot(1+\Omega)}}{\Omega\cdot s^{\Omega}} \qquad [A.9]$$

y, operando, resulta: $$\hat{s}+G(\cdot)=\hat{s}+\frac{1-c}{c}\cdot s^{-\Omega} \qquad [A.10]$$

Teniendo en cuenta el valor de la estrategia de Brennan y Schwartz según [15]:

$$V(s,c,\Omega)=s\cdot c+(1-c)\cdot s^{-\Omega} \qquad [A.11]$$

y dividiendo esta igualdad por la anterior, se obtiene:

$$\frac{V(\cdot)}{s+G(\cdot)}=\frac{s\cdot c+(1-c)\cdot s^{-\Omega}}{s+\frac{1-c}{c}\cdot s^{-\Omega}} \qquad [A.12]$$

En consecuencia: $$\frac{V(s,c,\Omega)}{s+G(s,\varepsilon,\Omega)}=c \qquad \text{q.e.d.}$$

8.2. Demostración de la igualdad [41] del texto

Proposición:

$$\lim_{\Omega\to 0} G(\Gamma,\varepsilon,\Omega) = \varepsilon \qquad [A.13]$$

Demostración:

Por [40]:
$$lim_{\Omega\to 0} G(\Gamma,\varepsilon,\Omega) = lim_{\Omega\to 0} \frac{\varepsilon}{1+\Omega}\cdot\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right]^{-\Omega} \qquad [A.14]$$

Por una propiedad de los límites puede escribirse:

$$lim_{\Omega\to 0} G(\Gamma,\varepsilon,\Omega) = lim_{\Omega\to 0} \frac{\varepsilon}{1+\Omega}\cdot lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right]^{-\Omega} \qquad [A.15]$$

Es evidente que:
$$lim_{\Omega\to 0} \frac{\varepsilon}{1+\Omega} = \varepsilon \qquad [A.16]$$

Por otra parte:
$$lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right]^{-\Omega} = lim_{\Omega\to 0}\left[\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]^{-\Omega}\cdot\left[\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right]^{-\Omega}\right] \qquad [A.17]$$

por lo que:
$$lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right]^{-\Omega} = lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]^{-\Omega}\cdot lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right]^{-\Omega} \qquad [A.18]$$

Es evidente que:
$$\lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right]^{-\Omega} = 1 \qquad [A.19]$$

Por otra parte:
$$lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]^{-\Omega} = 0^0 \qquad [A.20]$$

Esta indeterminación es tratable aplicando el siguiente teorema del análisis matemático[24]:

$$lim_{x\to a} \ln[g(x)] = \ln\left[lim_{x\to a}\, g(x)\right] \qquad [A.21]$$

Puede, pues, escribirse:
$$\ln\left[lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]^{-\Omega}\right] = lim_{\Omega\to 0}\left[\ln\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]^{-\Omega}\right] =$$

$$= lim_{\Omega\to 0}\left[-\Omega\cdot\ln(1+\Omega)\right] - lim_{\Omega\to 0}\,\Omega\cdot\ln\Omega = 0 - lim_{\Omega\to 0}\frac{\ln\Omega}{\frac{1}{\Omega}} =$$

(24) Kudriatsev (1984), págs. 136-139.

$$= lim_{\Omega\to 0} \frac{\frac{1}{\Omega}}{\frac{1}{\Omega^2}} = lim_{\Omega\to 0}\,\Omega = 0 \qquad [A.22]$$

donde se ha aplicado el teorema de l'Hôpital para tratar la indeterminación implícita en $\lim_{\Omega\to 0}\ [\Omega\cdot\ln\Omega]$.

Aplicando antilogaritmos: $\text{antiln}\left[\ln\left[lim_{\Omega\to o}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]^{-\Omega}\right]\right] = \text{antiln}\,0 = 1$ [A.23]

Luego: $$lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]^{-\Omega} = 1 \qquad [A.24]$$

Por tanto: $$lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right]^{-\Omega} = 1 \qquad [A.25]$$

En definitiva, resulta: $\lim_{\Omega\to 0} G\,(\Gamma,\varepsilon,\Omega) = \varepsilon$ q.e.d.

8.3. Demostración de la igualdad [44] del texto

Proposición: $$lim_{\Omega\to 0}\ \varepsilon = \frac{1-c}{c} \qquad [A.26]$$

Demostración:

Por [43]: $$lim_{\Omega\to 0}\,\varepsilon = lim_{\Omega\to 0}\ \frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\left[\frac{\Omega\cdot(1-c)}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} \qquad [A.27]$$

Es inmediato observar que: $$lim_{\Omega\to 0}\ \frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\left[\frac{\Omega\cdot(1-c)}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} = 0\cdot\infty \qquad [A.28]$$

que es una forma de indeterminación, por lo que hay que hacer:

$$lim_{\Omega\to 0}\ \frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\left[\frac{\Omega\cdot(1-c)}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} = lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]\cdot\Omega^{\frac{1}{1+\Omega}}\cdot\left[\frac{1-c}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} \qquad [A.29]$$

es decir:

$$lim_{\Omega\to 0}\ \frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\left[\frac{\Omega\cdot(1-c)}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} = lim_{\Omega\to 0}\left[\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]\cdot\Omega^{\frac{1}{1+\Omega}}\right]\cdot lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1-c}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} \qquad [A.30]$$

Ante todo es evidente que: $$lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1-c}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} = \frac{1-c}{c} \qquad [A.31]$$

Por otra parte: $$lim_{\Omega\to 0}\left[\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]\cdot\Omega^{\frac{1}{1+\Omega}}\right] = lim_{\Omega\to 0}\,\Omega^{\frac{-\Omega}{1+\Omega}}\cdot lim_{\Omega\to 0}\,(1+\Omega) \qquad [A.32]$$

Donde: $$\lim_{\Omega\to 0} (1+\Omega) = 1 \qquad [A.33]$$

y: $$lim_{\Omega\to 0}\Omega^{\frac{-\Omega}{1+\Omega}} = 0^0 \qquad [A.34]$$

Esta indeterminación puede tratarse aplicando el teorema utilizado en [A.20], por lo que:

$$lim_{\Omega\to 0}\left[\ln\Omega^{\frac{-\Omega}{1+\Omega}}\right] = \ln\left[lim_{\Omega\to 0}\Omega^{\frac{-\Omega}{1+\Omega}}\right] \qquad [A.35]$$

Luego: $$lim_{\Omega\to 0}\left[\ln\Omega^{\frac{-\Omega}{1+\Omega}}\right] = lim_{\Omega\to 0}\left[\left[\frac{-\Omega}{1+\Omega}\right]\cdot\ln\Omega\right] = -\,lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{\ln\Omega}{(1+\Omega)/\Omega}\right] =$$

$$= -\,lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{\frac{1}{\Omega}}{\frac{\Omega-(1+\Omega)}{\Omega^2}}\right] = lim_{\Omega\to 0}\Omega = 0 \qquad [A.36]$$

donde se ha aplicado el teorema de l'Hôpital para tratar la indeterminación implícita en $\lim_{\Omega\to 0} \{ \ln \Omega \ / \ [(1+\Omega) \ / \ \Omega] \}$.

Aplicando antilogaritmos: $$\text{antiln}\left[\ln\left[lim_{\Omega\to 0}\Omega^{\frac{-\Omega}{1+\Omega}}\right]\right] = \text{antiln}\, 0 = 1 \qquad [A.37]$$

Por tanto: $$lim_{\Omega\to 0}\Omega^{\frac{-\Omega}{1+\Omega}} = 1 \qquad [A.38]$$

Teniendo en cuenta [A.44], [A.45] y [A.50], podemos escribir:

$$lim_{\Omega\to 0}\left[\left[\frac{1+\Omega}{\Omega}\right]\cdot\Omega^{\frac{1}{1+\Omega}}\right] = lim_{\Omega\to 0}\Omega^{\frac{-\Omega}{1+\Omega}}\cdot lim_{\Omega\to 0}(1+\Omega) = 1 \qquad [A.39]$$

y, en definitiva: $$lim_{\Omega\to 0}\frac{1+\Omega}{\Omega}\cdot\left[\frac{\Omega\cdot(1-c)}{c}\right]^{\frac{1}{1+\Omega}} = \frac{1-c}{c} \qquad \text{q.e.d.}$$

8.4. Análisis de la relación entre ϵ y *c*

Por [44]: $$\varepsilon = \frac{1-c}{c} \qquad [A.40]$$

Derivando ϵ respecto a c, se obtiene:

$$\frac{d\varepsilon}{dc} = -\left(\frac{1}{c^2}\right) < 0 \qquad [A.41]$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dc^2} = \frac{2}{c^3} \qquad [A.42]$$

Calculando límites, se obtiene:

$$\lim_{c \to 0} \varepsilon = \infty \qquad [A.43]$$

$$\lim_{c \to \infty} \varepsilon = -1 \qquad [A.44]$$

$$\lim_{c \to -\infty} \varepsilon = -1 \qquad [A.45]$$

ϵ es el coeficiente de protección de la cartera de riesgo y sólo tiene sentido económico cuando es igual o superior a cero, es decir:

$$\epsilon \geqslant 0 \qquad [A.46]$$

Los resultados obtenidos garantizan que para los valores de ϵ que tienen sentido económico se cumplen las siguientes propiedades:

– ϵ es función monótona decreciente de c (primera derivada negativa);

– ϵ es una función convexa de c (segunda derivada positiva);

– para cada valor de c existe un único valor de ϵ.

Además, teniendo en cuenta [A.41], [A.43] y [A.44], puede escribirse:

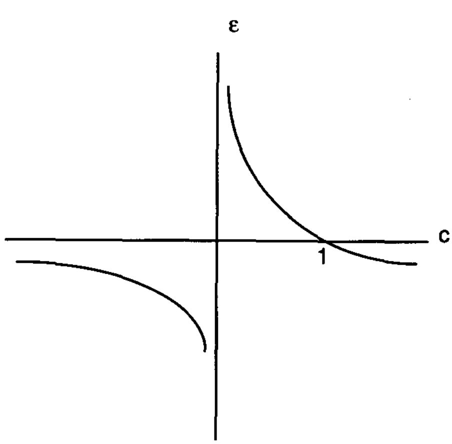
$$\varepsilon \geq 0 \iff 0 < c \leq 1 \qquad [A.47]$$

En los gráficos anexos se reproduce la función $\epsilon = (1-c) / c$. El gráfico 1 representa la función en los cuatro cuadrantes, mientras que el gráfico 2 recoge sólo el primer cuadrante, donde tiene significado económico.

En el gráfico 1 se observa la existencia de una asíntota horizontal para $\epsilon = -1$, ya indicada en [A.44] y [A.45].

Gráfico 1

$\varepsilon = (1\text{-}c)/c$



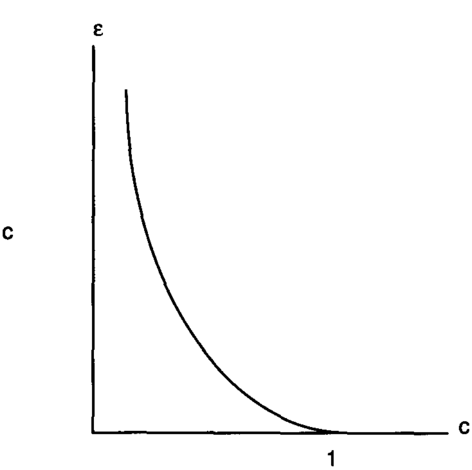
Rango de los ejes:

abcisas: c : (-6.5 , 6.5)

ordenadas: ε : (-3.1 , 3.2)

Gráfico 2

$\varepsilon = (1\text{-}c)/c$



Rango de los ejes:

abcisas: c : (0, 3.125)

ordenadas: ε : (0, 1.6)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Black, F.; Scholes, M. (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy,* 81, págs. 637-654.

Bookstaber, R.; Gold, J. (1988): "In Search of the Liability Asset", *Financial Analysts Journal,* 44 (1), págs. 70-80.

Brealey, R.; Myers, S. (1991): *Principles of Corporate Finance,* 4.ª edic., London, McGraw-Hill.

Brennan, M.J.; Schwartz, E.S. (1988): "Time-Invariant Portfolio Insurance Strategies", *The Journal of Finance,* 43 (2), págs. 283-299.

Kritzman, M.P. (1988): "Insuring the Asset/Liability Ratio", en Donald L. Luskin (ed.), *Portfolio Insurance: A Guide to Dynamic Hedging,* John Wiley & Sons, New York, págs. 76-85.

Kudriatsev, L.D. (1984): *Curso de análisis matemático,* Moscú, MIR.

Margrabe, W. (1978): "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another", *The Journal of Finance,* 33 (1), págs. 177-186.

Merton, R.C. (1973): "Theory of Rational Option Princing", *Bell Journal of Economics and Management Science,* 4, Spring, págs. 141-183, reproducido en R.C. Merton (1990), págs. 255-308.

Merton, R.C. (1990): *Continuous-Time Finance,* edición revisada, Oxford, Basil Blackwell.

Tarrazón Rodón, M.A. (1992): *Planes y fondos de pensiones: función financiera y estrategias de inversión,* Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

Tarrazón Rodón, M.A.; Montllor i Serrats, J. (1993a): "Estrategias de inversión de los fondos de pensiones", *Perspectivas del sistema financiero,* n.º 42, págs. 44-53.

Tarrazón Rodón, M.A.; Montllor i Serrats, J. (1993b): "Las opciones de intercambio y su aplicación a la estrategia de inversión de los fondos de pensiones", *Comunicaciones del VII Congreso de la Asociación Española de Contabilidad y Administración de Empresas,* vol. 2, págs. 945-963.

Wagner, W.H. (1988): "The Many Dimensions of Risk", *The Journal of Portfolio Management,* 14 (2), págs. 35-39.

Fecha de recepción del original: Diciembre, 1993
Versión final: Mayo, 1994

ABSTRACT

A pension fund investment strategy must protect an asset-liability *ratio* in an infinite horizon, so that it systematically exceeds a certain previously chosen value. The suggested *proportional relative surplus insurance strategy* is a time-invariant strategy [Brennan-Schwartz (1988)] applied to exchange options [Margrabe (1978)]. Its asset-liability *ratio* is independent of volatility and interest rate. Furthermore, the distribution of total investment between risk portfolio and mimicking portfolio does not need any readjustment over time.

Keywords: pension funds, investment strategies, time invariant strategies, exchange options.