

UN ESTUDIO EMPÍRICO DE LA COHERENCIA*

JOSÉ LUIS GARCÍA LAPRESTA

CARLOS RODRÍGUEZ

URSICINO CARRASCAL

Universidad de Valladolid

Este trabajo tiene como objetivo relacionar los modelos de coherencia utilizados en las teorías normativas y la realidad empírica. Hemos introducido las preferencias k -acíclicas y k -transitivas y las hemos caracterizado algebraicamente, junto a los modelos convencionales de coherencia. Gracias a estas representaciones algebraicas hemos elaborado un programa informático que determina el nivel de coherencia alcanzado por un individuo en sus manifestaciones de preferencia. Finalmente, hemos llevado a cabo un estudio empírico sobre 500 encuestas realizadas a estudiantes. En él mostramos la estadística de los resultados obtenidos y analizamos la influencia de ciertas variables sobre el nivel de coherencia alcanzado.

Palabras clave: aciclicidad, modelos logit, preferencias, racionalidad limitada, transitividad.

El presente trabajo tiene como objetivo tender un puente entre los modelos de coherencia utilizados en la teorías normativas –tanto los clásicos como otros introducidos aquí– y la realidad empírica. Para ello hemos caracterizado algebraicamente, mediante matrices booleanas, una amplia gama de modelos de comportamiento racional basados en diversas propiedades de las relaciones de preferencia. A partir de estas caracterizaciones hemos elaborado un programa informático, que permite determinar el nivel de coherencia de cualquier individuo que muestre sus preferencias sobre los pares de opciones de un universo finito.

(*) Agradecemos a Francisco José Carrascal y José Manuel Blanco, del Centro de Proceso de Datos de la Universidad de Valladolid, su ayuda a la hora de programar la lectora óptica, así como a los estudiantes, profesores y Decanato de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid, su colaboración desinteresada. También deseamos agradecer a Jordi Brandts la valiosa información aportada y sus amables sugerencias, así como las observaciones efectuadas por un evaluador anónimo, que nos han permitido mejorar algunos aspectos del trabajo. No obstante, cualquier posible error sólo es imputable a los autores.

Con el fin de conocer en qué medida se satisfacen en un caso real los diferentes modelos de coherencia analizados, encuestamos a más de mil estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid. Los estudiantes mostraron sus preferencias sobre asignaturas de otras titulaciones que podrían cursar como créditos de libre elección. Una vez procesados los datos, hemos analizado los resultados obtenidos y la influencia que han tenido algunas variables sobre el nivel de coherencia alcanzado.

Modelos de coherencia utilizados

Tanto en el análisis económico como en las teorías normativas de la decisión se han considerado diferentes hipótesis de comportamiento racional parcialmente basadas en propiedades de las relaciones de preferencia e indiferencia. Así, los preórdenes completos, que constituyen el modelo convencional de coherencia, reflejan una capacidad perfecta de discriminación entre las opciones, al suponer transitivas tanto la relación de preferencia como la de indiferencia.

Con objeto de captar la discriminación imperfecta de las opciones, se han utilizado en la literatura tanto los semiórdenes como los órdenes de intervalo, los cuales caracterizan la existencia de umbrales de percepción constantes y variables, respectivamente. Estas estructuras vienen definidas a través de ciertas conexiones entre las relaciones de preferencia e indiferencia, de las que se deriva la transitividad de la relación de preferencia, aunque se permiten intransitividades en la relación de indiferencia.

Con el fin de modelizar niveles de coherencia más bajos que los correspondientes a los modelos anteriores, han sido consideradas en la literatura las estructuras cuasitransitivas y acíclicas. Mientras que en las primeras se exige que la relación de preferencia sea transitiva, en las segundas se permiten intransitividades tanto en la relación de preferencia como en la de indiferencia, pero se impide la existencia de ciclos en la relación de preferencia¹.

Esta escala clásica de modelos de coherencia ha sido ampliada en este trabajo con dos nuevas clases de relaciones de preferencia: las k -acíclicas y las k -transitivas². Las propiedades matemáticas que impondremos a estas relaciones de preferencia no son gratuitas: obedecen al deseo de dar tratamiento analítico a una gran variedad de casos realistas, no contemplados por los modelos clásicos, que forman parte de lo que suele denominarse racionalidad limitada³. Bajo el calificativo de racionalidad limitada pueden englobarse comportamientos tales como olvidos de declaraciones de preferencia efectuadas con anterioridad, falta de interés

(1) Un estudio de todas estas clases de relaciones de preferencia puede encontrarse, entre otros, en Suzumura (1983) y Schwartz (1986).

(2) En nuestro trabajo García Lapresta-Rodríguez Palmero (1996) se lleva a cabo un análisis más completo sobre las relaciones de preferencia k -acíclicas y k -transitivas.

(3) La noción de racionalidad limitada, establecida por Simon para reflejar comportamientos humanos reales desviados de los modelos convencionales de la toma de decisiones, ha sido ampliamente estudiada por los psicólogos Kahnemann y Tversky. A este respecto véanse Simon (1955), Simon (1956), Simon (1972), Uriarte (1991), Shafir-Tversky (1995) y Rubinstein (1996).

e información por las opciones a contrastar, descuidos por falta de atención, etc. Aunque estos comportamientos han sido catalogados en algunas ocasiones como “errores” de los agentes, Rubinstein (1996) considera los errores como un problema estructural en la toma de decisiones individuales y, por tanto, como casos particulares de racionalidad limitada.

Las manifestaciones de racionalidad limitada tienden a acentuarse cuando aumenta el número de opciones a comparar. Dicho aumento suele originar un mayor número de preferencias consecutivas encadenadas, lo que puede facilitar la aparición de ciclos en las preferencias, dando lugar a relaciones de preferencia no acíclicas. Con el fin de reflejar estos comportamientos hemos introducido las relaciones de preferencia k -acíclicas⁴ como aquéllas que no tienen ciclos de orden menor o igual que $k + 1$. Con ellas modelizaremos y ordenaremos, mediante los valores de k , los diversos niveles de coherencia asociados.

En otras ocasiones los agentes pueden cometer intransitividads en sus preferencias sin llegar a tener ciclos en ellas. Sería el caso en el que, tras manifestar preferencia entre eslabones consecutivos de una cadena de opciones, al final se mostrara indiferencia entre la primera y la última opción. Por otra parte, parece natural que a medida que aumente el número de manifestaciones concatenadas de preferencia, disminuyan las declaraciones de indiferencia entre los extremos⁵. Para tener en cuenta estos fenómenos hemos introducido las relaciones de preferencia k -transitivas como aquéllas en las que, tras un mínimo de k manifestaciones encadenadas de preferencia, la primera opción es preferida a la última. Esta clase de relaciones de preferencia permite modelizar y ordenar, según sea k , los diferentes niveles de coherencia correspondientes a los citados comportamientos.

En la sección I definimos formalmente las relaciones de preferencia k -acíclicas y las k -transitivas. Hemos hecho notar que las primeras abarcan desde la asimetría hasta la aciclicidad, mientras que las segundas varían desde la aciclicidad hasta la cuasitransitividad. Además, cuando el conjunto de opciones es finito, la infinita cadena virtual de modelos de coherencia, basados en la k -aciclicidad y la k -transitividad, se colapsa en la aciclicidad, estableciéndose así una ordenación finita de niveles de comportamiento racional cuyo límite es la cuasitransitividad. Con estas dos clases de relaciones de preferencia y las clásicas (acíclicas, cuasitransitivas, órdenes de intervalo, semiórdenes y preórdenes completos) se dispone de una escala creciente de modelos de comportamiento racional para la toma de decisiones individuales, tanto más amplia cuanto mayor sea el número de opciones. Esta escala se utilizará para evaluar los niveles de coherencia alcanzados por los estudiantes encuestados.

(4) Aizerman-Aleskerov (1984, pág. 1.218) utilizan en otro contexto y con otro lenguaje esta clase de relaciones de preferencia. Asimismo, Peters-Walker (1991, pág. 1.795) consideran este tipo de relaciones, sin definir las explícitamente.

(5) Esto puede ser debido a la tendencia natural a acumular la intensidad de preferencia entre opciones encadenadas por manifestaciones de preferencia.

Representación matricial y programa informático

Cuando el conjunto de opciones es finito, existe un isomorfismo entre relaciones binarias y matrices booleanas, que asigna a cada relación binaria una matriz de ceros y unos, y transforma las operaciones entre relaciones binarias en operaciones entre matrices booleanas. Al haber definido los distintos modelos de coherencia a través de operaciones que involucran a las relaciones de preferencia e indiferencia, el citado isomorfismo nos ha permitido caracterizar estos modelos mediante identidades matriciales. La importancia de estas caracterizaciones radica en que permiten tratar de forma computacional la clasificación de relaciones de preferencia según los modelos de coherencia considerados. Con el fin de hacer viable el tratamiento computacional mencionado, hemos elaborado un programa informático con el que es posible determinar el nivel de coherencia alcanzado por un agente, a partir de la matriz booleana asociada a su relación de preferencia⁶.

En la sección 2, tras establecer el isomorfismo entre relaciones binarias y matrices booleanas, se presentan las caracterizaciones matriciales de los modelos de coherencia, así como el programa informático mencionado. El contenido de esta sección, si bien es puramente instrumental, es fundamental para los objetivos propuestos en este trabajo, dado que facilita el contraste empírico de supuestos de coherencia más realistas que los convencionales. En consecuencia, establece el puente anunciado entre las teorías normativas y la realidad empírica.

Estudio empírico

El objetivo principal del estudio empírico ha consistido en determinar, en un caso concreto, en qué medida se satisfacen los diferentes modelos de coherencia considerados, así como determinar la influencia de algunas variables en los niveles de coherencia alcanzados⁷. Con este fin hemos realizado una encuesta a estudiantes de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid. En ella los estudiantes mostraban voluntariamente sus preferencias sobre algunas asignaturas incluidas en el catálogo de créditos de libre elección. Se aprovechó para ello el estudio que el Decanato tenía previsto realizar para conocer la demanda real de este tipo de asignaturas. Esta circunstancia incidió muy directamente en el interés que los estudiantes mostraron por la encuesta, tanto en el momento de su realización como una vez obtenidos los resultados⁸. Para contestar las preguntas formuladas los estudiantes disponían de una hoja informativa de las

(6) Este programa puede ser fácilmente ampliado, de forma que detecte el cumplimiento de cualquier propiedad de coherencia expresable algebraicamente en función de las relaciones de preferencia e indiferencia.

(7) Uno de los primeros análisis empíricos recogidos en la literatura sobre el incumplimiento de las hipótesis convencionales de comportamiento racional se debe a May (1954). Desde entonces ha habido un buen número de análisis experimentales relativos a la toma de decisiones individuales. Una amplia panorámica sobre este tema puede encontrarse, entre otros, en Payne-Bettman-Johnson (1992), Camerer (1994), Friedman-Sunder (1994), Shafir-Tversky (1995) y Rubinstein (1996).

(8) Con objeto de que los estudiantes no tuvieran comportamientos estratégicos, que pudieran perturbar sus verdaderas preferencias, éstos sólo conocían uno de los fines de la encuesta: la determinación de la demanda de las asignaturas a comparar.

asignaturas sobre las que podían mostrar sus preferencias, en la que se plasmaba literalmente la información contenida en el catálogo de créditos de libre elección, publicado por la Universidad de Valladolid. Aunque la información aportada era fiel reflejo del catálogo, su concisión y brevedad, junto a la ausencia de cualquier otro tipo de información adicional, motivó que los estudiantes mostraran sus preferencias sobre opciones de las que tenían una percepción vaga. Este hecho, junto a la posible consideración de diferentes criterios simultáneos para la comparación, tales como interés por la materia, dificultad intrínseca de la asignatura, lejanía del Centro en el que se imparte, etc., incidía negativamente, sin duda, en la consecución de niveles altos de coherencia, lo cual motivaba la consideración de modelos de coherencia ligados a la racionalidad limitada⁹.

En este escenario de información imprecisa y previsible utilización de criterios múltiples, son muchas las circunstancias que pueden contribuir a la aparición de incoherencias. Así, de entre las variables que, a nuestro juicio, podrían influir en los niveles de coherencia conseguidos, hemos seleccionado aquéllas sobre las que era factible efectuar un control objetivo. En primer lugar presuponíamos que el número de opciones a comparar tenía influencia en el nivel de coherencia alcanzado. Por este motivo, confeccionamos 4 tipos de cuestionarios, con 6, 7, 8 y 9 asignaturas, en donde se hacían 15, 21, 28 y 36 comparaciones, respectivamente. Después de realizar una serie de filtros, con objeto de dotar de mayor validez al estudio empírico, seleccionamos aleatoriamente 125 cuestionarios de cada modelo. Consideramos como otra posible variable explicativa del nivel de coherencia alcanzado el grado de decisividad (relación entre el número de manifestaciones efectivas de preferencia y número total de comparaciones). Basamos la elección de esta variable en la suposición de que un agente decidido, que apenas muestra indiferencia entre las opciones comparadas, puede caer en incoherencias con mayor facilidad que otro más cauteloso en sus manifestaciones de preferencia. También tuvimos en cuenta el interés que los estudiantes declararon por la encuesta. Fundamentamos la elección de esta variable en la suposición de que un mayor interés por el tema de la encuesta influía positivamente en el nivel de coherencia obtenido. Finalmente consideramos como posibles variables explicativas la edad y el sexo de los encuestados, si bien no teníamos una hipótesis clara de su contribución a la coherencia.

En la sección 3 recogemos las características y la forma en la que se llevó a cabo el estudio empírico, así como los resultados estadísticos obtenidos en las encuestas. Además incluimos un análisis econométrico sobre la influencia de las variables mencionadas en los niveles de coherencia alcanzados.

Notación y definiciones

Notación

Una relación binaria sobre un conjunto no vacío X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$. Si $R \subseteq X \times X$, se empleará tanto la notación conjuntista $(x, y) \in R$ como la predicativa $x R y$.

(9) Tanto la información imprecisa como la utilización de criterios de valoración múltiples son circunstancias frecuentes en muchas situaciones en la toma de decisiones individuales.

Dadas dos relaciones binarias R, S , sobre X , se utilizará la siguiente notación:

1. $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ es la *relación diagonal* de X [$x \Delta y \Leftrightarrow x = y$].
2. $R^{-1} = \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in R\}$ es la *relación inversa* de R [$x R^{-1} y \Leftrightarrow y R x$].
3. $R^c = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \notin R\}$ es la *relación complemento* de R [$x R^c y \Leftrightarrow$ no $x R y$].
4. $R \cap S = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \in R \text{ y } (x, y) \in S\}$ es la *relación intersección* de R con S [$x (R \cap S) y \Leftrightarrow (x R y \text{ y } x S y)$].
5. $R \cup S = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \in R \text{ o } (x, y) \in S\}$ es la *relación unión* de R con S [$x (R \cup S) y \Leftrightarrow (x R y \text{ o } x S y)$].
6. $R \circ S = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, z) \in R \text{ y } (z, y) \in S \text{ para algún } z \in X\}$ es la *relación composición* de R con S [$x (R \circ S) y \Leftrightarrow$ existe $z \in X$ ($x R z \text{ y } z S y$)].
7. R^n es la *relación potencia n -ésima* de R y se define por: $R^0 = \Delta$, $R^{k+1} = R^k \circ R$.

Definición

Una relación binaria R sobre un conjunto X es:

1. *Asimétrica* si y sólo si $R \cap R^{-1} = \theta$ [$\forall x, y \in X \quad x R y \Rightarrow$ no $y R x$].
2. *Acíclica* si y sólo si $\forall n \in \mathbb{N} \quad R^n \cap R^{-1} = \emptyset$ [$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in X$ ($x_1 R x_2, x_2 R x_3, \dots, x_{n-1} R x_n$) \Rightarrow no $x_n R x_1$].
3. *Transitiva* si y sólo si $R^2 \subseteq R$ [$\forall x, y, z \in X$ ($x R y \text{ y } y R z$) $\Rightarrow x R z$].
4. *Negativamente transitiva* si y sólo si R^c es transitiva [$\forall x, y, z \in X$ (no $x R y$ y no $y R z$) \Rightarrow no $x R z$].
5. *Completa* si y sólo si $R \cup R^{-1} = X \times X$ [$\forall x, y \in X$ ($x R y \text{ o } y R x$)].

Relaciones de preferencia

Consideraremos como noción primitiva la de preferencia estricta tomando una relación binaria asimétrica P sobre el conjunto de opciones $X \neq \emptyset$, denominada *relación de preferencia*, donde $x P y$ se interpreta como “ x es preferida a y ” o “ x es mejor que y ”. Asociada a P , se define la *relación de indiferencia* I , como ausencia de preferencia estricta: $I = P^c \cap (P^{-1})^c = (P \cup P^{-1})^c$. Así, $x I y$ (“ x es indiferente a y ”) significa que “ni x es preferida a y ni y es preferida a x ”. De esta construcción se sigue que I es reflexiva y simétrica y que, para cualquier par de opciones $x, y \in X$, se da una y sólo una de las tres situaciones: $x P y$, $y P x$, $x I y$. Por tanto, la *relación de preferencia no estricta*, $P \cup I$, es completa y, en consecuencia, reflexiva. A partir de ahora, siempre que no se especifique lo contrario, se entenderá que las preferencias son estrictas.

En el análisis de la coherencia que se lleva a cabo en este trabajo se consideran, además de las clases de relaciones de preferencia k -acíclicas y k -transitivas introducidas aquí, otras que son clásicas en la literatura y que vienen definidas de la siguiente forma:

1. *Acíclicas*: P es acíclica.
2. *Cuasitransitivas*: P es transitiva.

3. *Órdenes de intervalo*: $P \circ I \circ P \subseteq P$ [$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in X (x_1 P x_2, x_2 I x_3 \text{ y } x_3 P x_4) \Rightarrow x_1 P x_4$].
4. *Semiórdenes*: $P \circ I \circ P \subseteq P$ y $P^2 \cap P^2 = \emptyset$.
5. *Preórdenes completos*: P es negativamente transitiva, lo cual equivale a que la relación de preferencia no estricta, $P \cup I$, sea transitiva y, a su vez, a que sean transitivas P e I .

Cada una de estas clases de relaciones de preferencia contiene a la siguiente, por lo que, salvo en las acíclicas, P es transitiva. En cambio, a excepción de los preórdenes completos, I no es necesariamente transitiva.

Ciclos en las preferencias

Una relación de preferencia P sobre X tiene *ciclos de orden* $m \in \mathbb{N}$ si y sólo si existen $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $x_1 P x_2, x_2 P x_3, \dots, x_{m-1} P x_m$ y $x_m P x_1$. Por ser P asimétrica (y por tanto irreflexiva), no tiene ciclos de orden 1 ni de orden 2. Así, P no tiene ciclos de orden $m \geq 3 \Leftrightarrow P^m \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow P^{m-1} \cap P^{-1} = \emptyset \Leftrightarrow P^{m-1} \subseteq P \cup I$. Obviamente, P es acíclica cuando no tiene ciclos.

1. k -ACICLICIDAD Y k -TRANSITIVIDAD

A continuación presentamos las clases de relaciones de preferencia k -acíclicas y k -transitivas. Mientras que las primeras pueden tener ciclos, las segundas son siempre acíclicas, pero no necesariamente transitivas.

En primer lugar, después de definir el concepto de k -acíclicidad, mostramos las relaciones existentes en la clase de preferencias k -acíclicas. Además ponemos de manifiesto que la noción de k -acíclicidad es, en general, distinta para cada valor de k . Abarca desde la asimetría hasta la acíclicidad y modeliza una gama ordenada de supuestos de coherencia, correspondientes a niveles crecientes de racionalidad. Análogamente, una vez definida la noción de k -transitividad, establecemos las relaciones que existen en la clase de preferencias k -transitivas, para distintos valores del parámetro k , de manera que se garantiza la existencia de una escala ordenada de modelos, entre la cuasitransitividad y la acíclicidad, relativos a niveles decrecientes de coherencia.

Definición

Sean P una relación de preferencia sobre X y $k \in \mathbb{N}$. Se dice que P es k -acíclica si y sólo si no tiene ciclos de orden menor o igual que $k+1$, es decir $P^m \subseteq P \cup I$ (equivalentemente, $P^{m+1} \cap \Delta = \emptyset$) para cualquier $m \leq k$.

En otras palabras, que P sea k -acíclica significa que cuando se den no más de k manifestaciones consecutivas de preferencia: $x_1 P x_2, x_2 P x_3, \dots, x_m P x_{m+1}$, con $m \leq k$, la primera opción, x_1 , ha de ser preferida o indiferente a la última, x_{m+1} o, lo que es lo mismo, la última opción no puede ser preferida a la primera.

Observaciones

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se verifica:

1. Toda relación de preferencia es 1-acíclica.

2. Toda relación de preferencia acíclica es k -acíclica.
3. Toda relación de preferencia $(k+1)$ -acíclica es k -acíclica.
4. Si X tiene al menos $k+2$ elementos, entonces existen relaciones de preferencia sobre X que son k -acíclicas pero no $(k+1)$ -acíclicas:

Sean $X = \{x_1, \dots, x_{k+2}, \dots\}$ y $P = \{(x_i, x_{i+1}) \mid i \in \{1, \dots, k+1\}\} \cup \{(x_{k+2}, x_1)\}$. Como $P^m \cap \Delta = \emptyset$ para cualquier $m \leq k+1$ y $P^{k+2} \cap \Delta \neq \emptyset$, se tiene que P es k -acíclica, pero no $(k+1)$ -acíclica.

Definición

Sean P una relación de preferencia sobre X y $k \in \mathbb{N}$. Se dice que P es k -transitiva si y sólo si $P^m \subseteq P$ para todo $m \geq k$, es decir, cuando para cualquier $m \geq k$ y cualesquiera $x_1, \dots, x_m, x_{m+1} \in X$ se verifica: $(x_1 P x_2, x_2 P x_3, \dots, x_m P x_{m+1}) \Rightarrow x_1 P x_{m+1}$.

En otras palabras, que P sea k -transitiva significa que cuando se den al menos k manifestaciones consecutivas de preferencia, la primera opción ha de ser preferida a la última.

Obsérvese que las nociones de 1-transitividad, 2-transitividad y cuasitransitividad resultan equivalentes.

Observaciones

1. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ toda relación de preferencia k -transitiva es acíclica: Supongamos, por reducción al absurdo, que P es k -transitiva pero no acíclica. Entonces $P^m \cap \Delta \neq \emptyset$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Tomando $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $r \cdot m \geq k$, se tiene $P^{r \cdot m} \cap \Delta \neq \emptyset$, lo cual va en contra de que P sea k -transitiva, ya que $P^{r \cdot m} \cap \Delta \subseteq P \cap \Delta = \emptyset$.
2. Existen relaciones de preferencia acíclicas que no son k -transitivas para ningún $k \in \mathbb{N}$: Para $X = \mathbb{N}$, si se define $x P y \Leftrightarrow y = x + 1$, se tiene: $x P^m y \Leftrightarrow y = x + m$; resulta inmediato comprobar que P es acíclica pero no es k -transitiva para ningún $k \in \mathbb{N}$.
3. Para cualquier $k \in \mathbb{N}$ toda relación de preferencia k -transitiva es $(k+1)$ -transitiva.
4. Si X tiene al menos $k+1$ elementos, con $k \geq 2$, entonces existen relaciones de preferencia sobre X que son $(k+1)$ -transitivas pero no k -transitivas: Para $X = \{x_1, \dots, x_{k+1}, \dots\}$ y $P = \{(x_i, x_{i+1}) \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$ se verifica $P_m = \emptyset$ para cualquier $m \geq k+1$; luego P es $(k+1)$ -transitiva. Sin embargo, $x_1 P^k x_{k+1}$ y $x_1 I x_{k+1}$; por tanto P no es k -transitiva.

A continuación probamos que, cuando el conjunto de opciones es finito, la infinita cadena virtual de supuestos de coherencia basados en la k -acíclicidad y la k -transitividad colapsa en la acíclicidad, por lo que se establece una ordenación finita de niveles de comportamiento racional, entre la 1-acíclicidad (toda relación de preferencia satisface esta propiedad) y la cuasitransitividad.

Proposición 1

Si X tiene n elementos, P es una relación de preferencia sobre X y $k \geq n-1$, entonces son equivalentes:

1. P es k -acíclica.
2. P es acíclica.
3. P es $(k+1)$ -transitiva.
4. $P^n = \emptyset$.
5. $P^m = \emptyset$, para algún $m \in \mathbb{IN}$.

Demostración

$2 \Rightarrow 4$: Supongamos, por reducción al absurdo que P es acíclica y $P^n \neq \emptyset$. Entonces existen $n+1$ elementos x_1, \dots, x_{n+1} tales que $x_1 P x_2, x_2 P x_3, \dots, x_n P x_{n+1}$. Como X sólo tiene n elementos, al menos uno está repetido, por lo que P tiene ciclos, en contra de lo supuesto.

$4 \Rightarrow 5$: Obvio.

$5 \Rightarrow 2$: Si $P^m = \emptyset$, entonces P es m -transitiva y, por tanto, acíclica.

$1 \Rightarrow 2$: Sea P k -acíclica; como $k \geq n-1$, P no tiene ciclos de orden menor o igual que n . Supongamos, por reducción al absurdo, que P no es acíclica. Tal como ha sido probado, 2 y 4 son equivalentes, luego $P^n \neq \emptyset$. Entonces existen $n+1$ elementos x_1, \dots, x_{n+1} tales que $x_1 P x_2, x_2 P x_3, \dots, x_n P x_{n+1}$. Como X sólo tiene n elementos, al menos uno de ellos está repetido. De aquí que $P^m \cap \Delta \neq \emptyset$, para algún $m \leq n$. Por tanto, existen ciclos de orden menor o igual que n , lo cual es absurdo.

$2 \Rightarrow 1$: Obvio.

$4 \Rightarrow 3$: Si $P^n = \emptyset$, entonces cualquier potencia de P de grado mayor o igual que n también es vacía, luego está contenida en P .

$3 \Rightarrow 2$: Obvio.

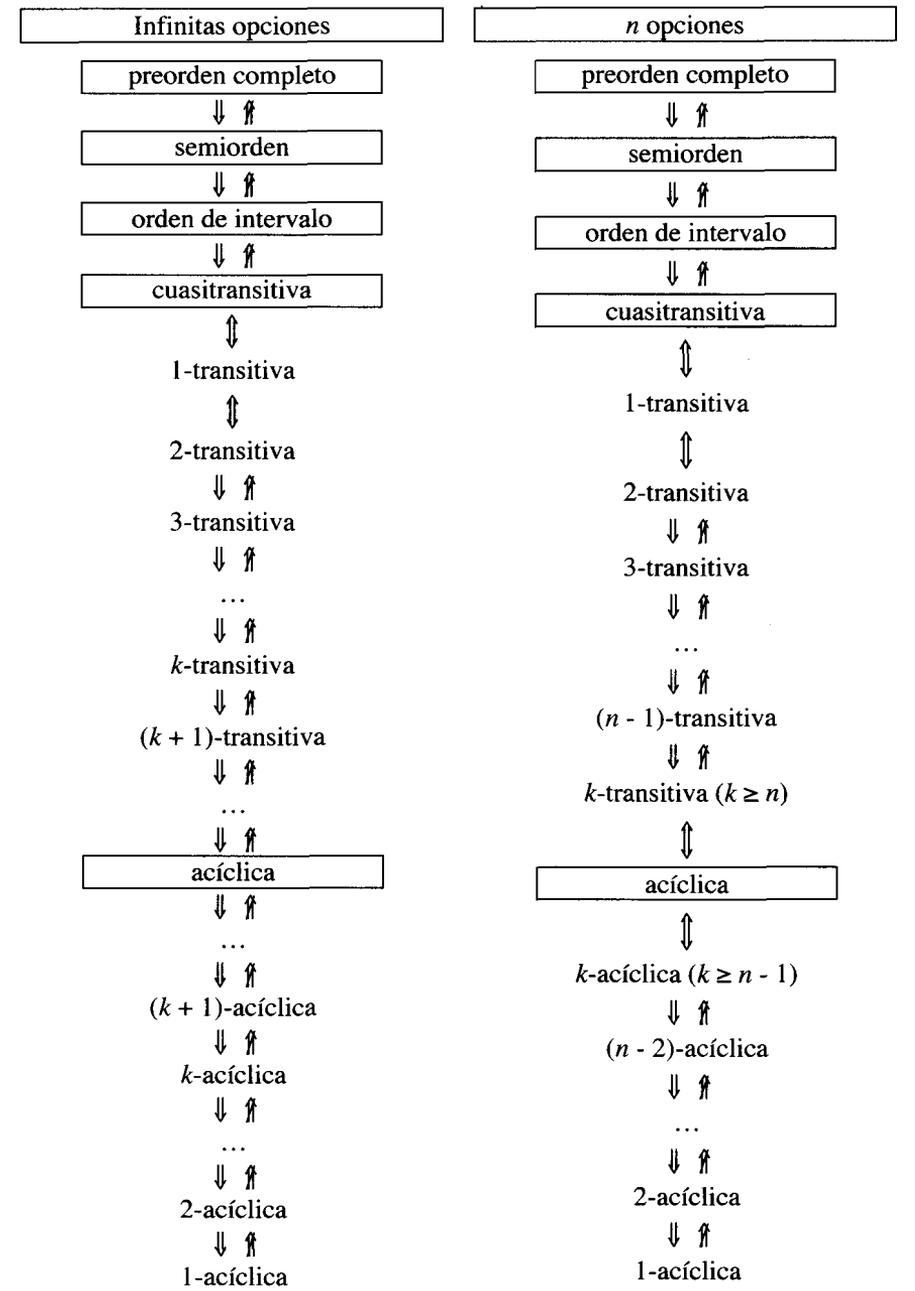
Síntesis

En el cuadro 1 mostramos, a modo de resumen, dos cadenas de implicaciones y equivalencias, una para el caso general y otra para el caso finito, relativas a las propiedades de las relaciones de preferencia. Ambas comienzan en la 1-aciclicidad; siguen por la k -aciclicidad, para valores crecientes del parámetro k ; pasan por la aciclicidad, la cual establece la frontera entre las propiedades de k -aciclicidad y de k -transitividad; siguen por la k -transitividad, para valores decrecientes del parámetro k , hasta llegar a la cuasitransitividad; pasan por los órdenes de intervalo y por los semiórdenes; y acaban en los preórdenes completos, los cuales constituyen el modelo convencional –aunque en muchos casos no el más realista– de coherencia.

2. DETERMINACIÓN DE LA COHERENCIA CON MATRICES BOOLEANAS

Para determinar en la práctica qué propiedades, de las aparecidas en el cuadro 1, verifica una relación de preferencia sobre un conjunto finito de opciones, tendremos en cuenta el isomorfismo existente entre relaciones binarias y matrices booleanas. Así, el análisis de la coherencia de los agentes que muestran sus preferencias sobre pares de opciones podrá llevarse a cabo de forma computacional mediante las matrices booleanas asociadas.

Cuadro 1



El álgebra de matrices booleanas

A partir del álgebra de Boole $\{0,1\}$, $+$, \cdot , c , cuyas operaciones vienen dadas en las siguientes tablas:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

	c
1	0
0	1

se define el álgebra de matrices booleanas $\langle \mathcal{M}_{n \times n}(\{0,1\}), +, \odot, \cdot, ^t, ^c, O_n, I_n \rangle$, que es de tipo $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$, donde $\mathcal{M}_{n \times n}(\{0,1\})$ es el conjunto de matrices cuadradas de orden n sobre $\{0,1\}$, O_n es la matriz nula, I_n es la matriz identidad y las operaciones entre matrices booleanas se definen como sigue¹⁰.

suma: $(M + N)(i, j) = M(i, j) + N(i, j)$,

producto lógico: $(M \odot N)(i, j) = M(i, j) \cdot N(i, j)$,

producto: $(M \cdot N)(i, j) = \sum_{k=1}^n M(i, k) \cdot N(k, j)$,

trasposición: $M^t(i, j) = M(j, i)$,

complemento: $M^c(i, j) = (M(i, j))^c$.

Proposición 2

Sea $\mathcal{R}(X)$ el conjunto de relaciones binarias sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. La aplicación $\phi : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\{0,1\})$, definida por $\phi(R) = M_R$, con $M_R(i, j) = 1$, si $x_i R x_j$ y $M_R(i, j) = 0$, en caso contrario, es un isomorfismo entre el álgebra $\langle \mathcal{R}(X), \cup, \cap, \odot, ^t, ^c, \emptyset, \Delta \rangle$ y el álgebra $\langle \mathcal{M}_{n \times n}(\{0,1\}), +, \odot, \cdot, ^t, ^c, O_n, I_n \rangle$.

Demostración

Si R y S son dos relaciones binarias sobre X tales que $M_R = M_S$, entonces $x_i R x_j \Leftrightarrow M_R(i, j) = 1 \Leftrightarrow M_S(i, j) = 1 \Leftrightarrow x_i S x_j$, es decir $R = S$; por otra parte, dada una matriz booleana $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\{0,1\})$, se tiene que $M = M_R$, con R la relación binaria sobre X definida por $x_i R x_j \Leftrightarrow M(i, j) = 1$. La justificación de que ϕ es un morfismo de álgebras de tipo $(2, 2, 2, 1, 1, 0, 0)$ es rutinaria.

Con el isomorfismo entre relaciones binarias y matrices booleanas se tienen las siguientes propiedades para cualquier par de relaciones binarias R y S sobre X :

$$M_{R \cup S} = M_R + M_S, \quad M_{R \cap S} = M_R \odot M_S, \quad M_{R \circ S} = M_R \cdot M_S,$$

$$M_{R^{-1}} = M_R^t, \quad M_{R^c} = M_R^c, \quad M_{\emptyset} = O_n, \quad M_{\Delta} = I_n.$$

De la Prop. 2 y de la equivalencia entre $R \subseteq S$, $R \cup S = S$ y $R \cap S = R$ se deduce la siguiente caracterización.

(10) La matriz $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\{0,1\})$ es una aplicación $M : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, de forma que $M(i, j)$ es el elemento de M situado en la fila i columna j .

Corolario

Si R y S son dos relaciones binarias sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces:

$$R \subseteq S \Leftrightarrow M_R + M_S = M_S \Leftrightarrow M_R \odot M_S = M_R.$$

Supuesto un conjunto finito de opciones sobre el que un agente muestra sus preferencias, una vez conocida su relación de preferencia, quedan determinadas las matrices asociadas a sus relaciones de preferencia, P , y de indiferencia, $I = (P \cup P^{-1})^c$: M_P y $M_I = (M_P + M_P^t)^c$. A partir de ellas, conocer el nivel de coherencia alcanzado pasa a ser un problema puramente computacional, tal como ponemos de manifiesto en la siguiente proposición, donde caracterizamos mediante matrices booleanas las clases de relaciones de preferencia aparecidas en el cuadro 1.

Proposición 3

Si P es una relación de preferencia sobre $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces:

1. P es k -acíclica $\Leftrightarrow M_P^{m+1} \odot I_n = O_n \ \forall m \in \{2, \dots, k\}$.
2. P es acíclica $\Leftrightarrow M_P^n = O_n$.
3. P es k -transitiva $\Leftrightarrow M_P^m + M_P = M_P \ \forall m \in \{k, \dots, n-1\}$.
4. P es cuasitransitiva $\Leftrightarrow M_P^2 + M_P = M_P$.
5. P es orden de intervalo $\Leftrightarrow M_P \cdot M_I \cdot M_P + M_P = M_P$.
6. P es semiorden $\Leftrightarrow M_P \cdot M_I \cdot M_P + M_P = M_P$ y $M_P^2 \odot M_I^2 = O_n$.
7. P es preorden completo $\Leftrightarrow M_P^2 + M_P = M_P$ y $M_I^2 + M_I = M_I$.

Demostración

Es consecuencia inmediata de la Prop. 2 y su corolario, al considerar las caracterizaciones de las diferentes clases de relaciones de preferencia que se detallan a continuación:

1. P es k -acíclica $\Leftrightarrow P^{m+1} \cap \Delta = \emptyset \ \forall m \in \{1, \dots, k\}$. No es necesario comprobar el caso $m = 1$, por ser P asimétrica.
2. P es acíclica $\Leftrightarrow P^n = \emptyset$, por la equivalencia entre 2 y 4 de la Prop. 1.
3. P es k -transitiva $\Leftrightarrow P^m \subseteq P \ \forall m \geq k$. Por la Prop. 1 no es necesario verificar los casos en los que $m \geq n$, ya que en ellos la k -transitividad coincide con la aciclicidad.
4. P es cuasitransitiva $\Leftrightarrow P^2 \subseteq P$, por definición.
5. P es un orden de intervalo $\Leftrightarrow P \circ I \circ P \subseteq P$, por definición.
6. P es un semiorden $\Leftrightarrow P \circ I \circ P \subseteq P$ y $P^2 \cap I^2 = \emptyset$ por definición.
7. P es un preorden completo $\Leftrightarrow P^2 \subseteq P$ e $I^2 \subseteq I$.

Programa informático

El programa informático que presentamos en el cuadro 2 ha sido elaborado en MATLAB y está basado en la Prop. 3. A partir de la matriz booleana asociada a una relación de preferencia sobre un conjunto finito de opciones, el programa detecta el cumplimiento o no de cada una de las propiedades aparecidas en el cuadro 1.

Cuadro 2

```

% -----
function y = coher(a)
x = size(a,1);
decisi = (200/(x*(x-1)))*(ones(1,x)*a*ones(x,1));
i = ones(x)-min(a'+a,ones(x));
i2 = min(i^2,ones(x));
p2 = min(a^2,ones(x));
pip = min(a*i*a,ones(x));
p2i2 = min((a^2).*(i^2),ones(x));
kaci = x-1;
ktran=2;
% -----
% Verificación de: aciclicidad(aci), cuasitransitividad (cuasitran),
% orden de intervalo (oi), semiorden (semior) y preorden completo (preorcom).
% -----
aci = all(all(a^x<=0));
cuasitran = all(all(p2<=a));
oi = all(all(pip<=a));
semior = all([oi,all(all(p2i2<=0))]);
preorcom = all([cuasitran,all(all(i2<=i))]);
% -----
% Cálculo de la k-transitividad (ktran) y de la k-aciclicidad (kaci).
% -----
if cuasitran == 0
    if aci == 1;
        k = size(a,1);
        while (min(a^k,ones(x))<=a);
            k=k-1;
        end;
        ktran = k+1;
    else;
        ktran = 0;
        k = 3
        while (trace(a^k) == 0);
            k=k+1;
        end;
        kaci=k-2;
    end;
end;
y = [kaci, aci, ktran, cuasitran, oi, semior, preorcom, decisi, x];
% -----

```

Si la relación no es acíclica, *kaci* señala el valor máximo de *k* para el que es *k*-acíclica; si es acíclica pero no cuasitransitiva, *ktran* indica el valor mínimo para el que es *k*-transitiva; *cuasitran*, *oi* y *semior* señalan si la relación es propiamente cuasitransitiva, orden de intervalo o semiorden, respectivamente; *preorcom* indica si la relación es un preorden completo; y finalmente *decisi* calcula la proporción de preferencias mostradas respecto al total de casos posibles.

3. TRABAJO EMPÍRICO

Para tratar de analizar la coherencia en un caso real, hemos realizado una encuesta a los estudiantes de los cuatro primeros cursos de la rama de Empresa de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad de Valladolid¹¹. En ella se les preguntaba por sus preferencias sobre varias asignaturas de otras titulaciones, que podrían cursar como créditos de libre elección en los nuevos planes de estudios, de próxima implantación¹².

3.1. Descripción de la encuesta

Confeccionamos 4 modelos de encuesta (con 6, 7, 8 y 9 asignaturas del catálogo de créditos de libre elección), donde se comparaban de forma exhaustiva y aleatoria todos los posibles pares de asignaturas. Todos estos modelos incluían tres preguntas adicionales: la edad, el sexo y el interés despertado por la encuesta.

Las encuestas se realizaron entre los días 8 y 28 de mayo de 1996 en horas de clase, sin previo aviso, y en presencia tanto del profesor de la asignatura como del Vicedecano de Ordenación Académica del Centro, el cual informó detalladamente sobre las características de las asignaturas que podrían cursar como créditos de libre elección en los nuevos planes de estudios. Una vez hecha la presentación, a cada estudiante se le entregó una hoja que describía las asignaturas a comparar (extraído literalmente del catálogo de créditos de libre elección), un cuestionario de preguntas y una hoja de respuestas, que más tarde fue procesada informáticamente. Los estudiantes contestaron las encuestas de forma voluntaria y anónima, sin ninguna compensación económica y en un ambiente de seriedad y silencio.

En el ámbito de la economía experimental suele exigirse la existencia de pagos a los agentes para que los experimentos tengan validez¹³. No obstante, los experimentos realizados por psicólogos no suelen ir acompañados de recompensas económicas y, sin embargo, han dado a conocer aspectos importantes de la toma de decisiones y de los procesos cognitivos asociados¹⁴.

(11) Escogimos la rama de Empresa por tener más alumnos matriculados que la rama de Economía General. No fueron encuestados los estudiantes de quinto curso, en presunción de que tuvieran menos interés por el tema, dada la próxima finalización de sus estudios.

(12) Uno de los objetivos del estudio empírico, ajeno a este trabajo, era conocer con la mayor precisión posible las preferencias de los estudiantes sobre algunas asignaturas que la Universidad de Valladolid ofrece para cursar como créditos de libre elección.

(13) Smith-Walker (1993) muestran varios experimentos en los que se analiza la incidencia de la cuantía de los pagos en los resultados finales.

(14) En Friedman-Sunder (1994, 4.1.3) se aborda la forma de realizar experimentos económicos con estudiantes en aulas, sin necesidad de remuneración, y se proporciona literatura al respecto.

Nuestro trabajo empírico, lejos de ser un experimento de laboratorio, permite conocer las preferencias de agentes motivados por incentivos no económicos. El hecho de que los estudiantes pudieran mostrar con antelación sus preferencias sobre asignaturas ofrecidas en el catálogo de créditos de libre elección, determinaba indirectamente la correspondiente demanda de plazas. Dado que las encuestas fueron efectuadas en un marco institucional, la información aportada servía para realizar una previsión del número de plazas solicitadas en cada asignatura. Los estudiantes conocían este hecho, que incidía directamente sobre sus intereses futuros, por lo que puede afirmarse que había incentivos para obrar con sinceridad. Si hubiera habido compensaciones económicas ligadas a los niveles de coherencia conseguidos, los pagos podrían haber falseado o perturbado las verdaderas preferencias. Es de suponer que los estudiantes hubieran actuado estratégicamente para conseguir el máximo nivel de coherencia, con el fin de obtener el mayor pago posible (bastaba ordenar linealmente las asignaturas y responder el cuestionario a partir del orden preestablecido, para evitar así ciclos e intransitividad), a costa de camuflar sus verdaderas preferencias.

Fueron encuestados un total de 1070 estudiantes, cada uno de los cuales respondió un único cuestionario. Esto supone casi la realización de un censo, pues se pulsó la opinión de prácticamente todos los alumnos que acuden a clase en los cuatro primeros cursos de la sección de Empresa. Una vez leídas las hojas de respuestas y descartadas las incompletas o erróneas (sólo aparecieron 33), construimos la matriz de preferencias de cada individuo, que contiene un 1 en la celda ij , si la asignatura i es preferida a la asignatura j , y 0, en caso contrario. Una mayor cantidad de celdas con 1 supone que se han declarado menos pares de asignaturas como indiferentes, decantándose abiertamente por una u otra. En el extremo opuesto, ningún 1 supone que el estudiante es indiferente entre cualquier par de asignaturas. En este caso, se alcanza, de forma obvia, un preorden completo (en la muestra sólo existen 2 casos).

Posteriormente se realizaron dos filtros más. En primer lugar se descartaron aquellos cuestionarios en donde se contestaba indiferencia en más de dos tercios del total de respuestas. A continuación se realizó un muestreo aleatorio para disponer de la misma cantidad de cuestionarios de cada uno de los cuatro modelos. Así, se extrajo una muestra de 500 cuestionarios, 125 de cada modelo.

Por sexos se constata una mayor participación de las mujeres (61%), lo que sólo es reflejo de su mayor proporción en la matrícula de estos cursos y de su mayor asistencia a clase. Según grupos de edad, los más numerosos son los casos extremos, tal como aparece en el cuadro 3.

Cuadro 3

Edad	≤ 20	21	22	23	≥ 24
Proporción	26%	19%	18%	13%	24%

Cuadro 4

Interés	N.I.	P.I.	I.	B.I.	M.I.
Proporción	5%	20%	51%	17%	7%

N.I.: nada interesante; P. I.: poco interesante; I.: interesante; B. I.: bastante interesante; M.I.: muy interesante.

En cuanto al interés declarado, como se ve en el cuadro 4, el 75% de los estudiantes encuentran la encuesta al menos interesante, lo que denota una buena motivación.

Por lo que se refiere a la decisividad, directamente valorada por la variable *decisi*, se observan valores altos en la mayoría de los estudiantes: de las 500 encuestas seleccionadas, en 78 no hay una sola manifestación de indiferencia, mientras que sólo un 8% declara indiferencia en más del 50% de los casos.

El cuadro 5 refleja el nivel de coherencia obtenido por los individuos para cada tipo de encuesta (6, 7, 8 o 9 opciones) y en el total de la muestra. En todos los casos se observa una fuerte concentración en los dos extremos. Existe una gran proporción de individuos cuyas preferencias resultan 1-acíclicas, así como una presencia destacada en los niveles altos de coherencia. La distribución es similar para cada uno de los tipos de encuesta, si bien hay menor proporción de preferencias 1-acíclicas en los cuestionarios con 6 opciones a comparar, lo cual es comprensible por su menor complejidad. Hemos de observar que en los cuestionarios de 6 opciones hay una gran proporción de preferencias cuasitransitivas. Esto provoca una menor presencia de niveles superiores de coherencia para ese modelo de encuesta.

3.2. Análisis estadístico de los resultados

Parece interesante analizar la relación que existe entre el nivel de coherencia alcanzado y las variables declaradas (edad, sexo e interés) u obtenidas (número de opciones y decisividad). Para ello planteamos un modelo de variables dependientes cualitativas multinomial¹⁵, lo que constituye una generalización de los modelos LOGIT, con la peculiaridad de que las características están ordenadas de manera secuencial (por ejemplo 6-transitividad implica 7-transitividad, aciclicidad y *k*-aciclicidad, pero no las propiedades de orden superior), de forma que se calculan probabilidades estimando repetidamente modelos de variable dicotómica. Para ello construimos una variable *Y* que recoge el nivel de coherencia obtenido por cada individuo y que toma los siguiente valores¹⁶:

$Y = 1$, si la relación de preferencia es 1-acíclica o 2-acíclica pero no acíclica.

$Y = 2$, si la relación de preferencia es acíclica pero no 7-transitiva o 6-transitiva.

(15) Véanse Gracia (1988, pág. 40) y Carrascal (1997, capítulo 11).

(16) Se han agrupado algunas relaciones por aparecer muy pocos individuos en alguna de ellas.

Cuadro 5: TABLA DE CARÁCTER SEGÚN EL NÚMERO DE OPCIONES

Frecuencia Porcentaje	Número de opciones				Total
	6	7	8	9	
1 - acíclica	26 5,20	77 15,40	51 10,20	61 12,20	215 43,00
2 - acíclica	0 0,00	0 0,00	0 0,00	1 0,20	1 0,20
acíclica	0 0,00	6 1,20	0 0,00	0 0,00	6 1,20
C 7 - transitiva	0 0,00	0 0,00	1 0,00	0 0,20	1 0,20
A 6 - transitiva	0 0,00	13 2,60	0 0,00	0 0,00	13 2,60
R 5- transitiva	1 0,20	17 3,40	1 0,20	2 0,40	21 4,20
C 4- transitiva	6 1,20	6 1,20	10 2,00	14 2,80	36 7,20
E 3-transitiva	14 2,80	4 0,80	18 3,60	18 3,60	54 10,80
R cuasitransitiva	64 12,80	1 0,20	3 0,60	1 0,20	69 13,80
orden de intervalo	2 0,40	1 0,20	5 1,00	0 0,00	8 1,60
semiorden	3 0,60	0 0,00	16 3,20	15 3,00	34 6,80
preorden completo	9 1,80	0 0,00	20 4,00	13 2,60	42 8,40
Total	125 25,00	125 25,00	125 25,00	125 25,00	500 100,00

Y = 3, si la relación de preferencia es 7-transitiva o 6-transitiva pero no 5-transitiva.

Y = 4, si la relación de preferencia es 5-transitiva pero no 4-transitiva.

Y = 5, si la relación de preferencia es 4-transitiva pero no 3-transitiva.

Y = 6, si la relación de preferencia es 3-transitiva pero no cuasitransitiva.

$Y = 7$, si la relación de preferencia es cuasitransitiva pero no orden de intervalo.

$Y = 8$, si la relación de preferencia es orden de intervalo pero no semiorden.

$Y = 9$, si la relación de preferencia es semiorden pero no preorden completo.

$Y = 10$, si la relación de preferencia es preorden completo.

Las probabilidades pueden escribirse como¹⁷:

$$\Pr (Y_i = 1) = F (X_i' \beta_1)$$

$$\Pr (Y_i = k) = F (X_i' \beta_k) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} (1 - F (X_i' \beta_j)), \text{ si } 2 \leq k \leq 10.$$

Los parámetros β_1 se estiman con toda la muestra, dividida en dos grupos: aquellas relaciones que son sólo 1-acíclicas o 2-acíclicas, pero no acíclicas y aquellas que al menos son acíclicas. Los parámetros β_2 se obtienen a partir de la submuestra de individuos cuyas relaciones de preferencia son acíclicas, dividida en dos grupos: las que no son 7-transitivas (y, por tanto, tampoco 6-transitivas) y las que al menos alcanzan ese nivel. Y lo mismo para las siguientes submuestras, de modo que en cada submuestra se estiman modelos de variable endógena dicotómica. Se puede comprobar que las probabilidades anteriores siempre suman 1, aunque en cada submuestra los modelos especificados tengan distintos regresores. Por ello se ha planteado la estimación de un modelo LOGIT, con una selección de regresores en cada submuestra.

Se ha realizado una selección de regresores. En el cuadro 6 se presentan las estimaciones elegidas. En cada columna aparece la propiedad a probabilizar, el número de individuos que superan esa propiedad y los que alcanzan como máximo dicha propiedad y, a continuación, el estadístico *AIC*, que representa el criterio de información de Akaike. Además se incluyen los estimadores del término independiente y de los regresores *opción y/o decisi*, allí donde han resultado significativos (según lo indica su probabilidad). No aparecen los regresores *sexo*, *interés* y *edad*, dado que en ningún caso son estadísticamente significativos. Por último aparecen los estadísticos referidos a la correlación entre las respuestas observadas y las probabilidades estimadas.

Por lo que se refiere a los estimadores, el signo positivo obtenido para la variable *decisi* muestra en cada caso que es más probable el nivel de preferencia superior (valor 0) al aumentar este regresor en cada una de las muestras. Esto podría significar que los individuos con alta decisividad tienen más claras sus preferencias y ponen mayor atención al responder.

El estimador de la variable *opción* es negativo en la mayoría de los niveles donde aparece, lo que indica que cuantas más opciones tenga la encuesta (y, por tanto, más preguntas), son más probables los niveles de coherencia inferiores, como era de esperar. Sin embargo, esto cambia a partir del nivel de cuasitransiti-

(17) F es la función de distribución de una variable aleatoria logística: $F(z) = 1/(1+e^{-z})$.

Cuadro 6

(Valor)	1AC-	Acicli.	7TR-6TR	5TR.	4TR.	3TR.	CUASITR.	ORDEN	SEMIOR.
Supera (0)	284	278	264	243	207	153	84	76	42
No supera (1)	216	6	14	21	36	54	69	8	34
AIC	676,841	...	107,191	112,601	197,200	230,760	111,743	49,912	88,656
Constante	2,3103	3,8359	0,0652	-2,8883	2,3913	1,9052	-12,9472	-8,6603	-5,8374
Pr>Chi 2	0,0002	0,0001	0,9477	0,0015	0,1222	0,1756	0,0001	0,0330	0,0004
OPCIÓN	-0,2707	-0,3445	-0,3258	1,9073	0,8666	...
Pr>Chi 2	0,0010	0,0326	0,0171	0,0001	0,0297	...
DECISI	0,0402	0,0795	0,0256	0,0195	...	0,0559	0,0732
Pr>Chi 2	0,0061	0,0001	0,0143	0,0436	...	0,0198	0,0002
Concordante	47,0%	...	75,7%	85,4%	69,0%	65,4%	79,9%	77,5%	81,8%
Discordante	30,3%	...	22,4%	13,2%	29,0%	31,8%	2,0%	21,2%	16,5%
Empate	22,7%	...	1,9%	1,4%	2,0%	2,8%	18,1	1,3%	1,8%
D. Somers	0,167	...	0,534	0,721	0,401	0,336	0,780	0,562	0,653
Gamma	0,216	...	0,544	0,731	0,409	0,346	0,952	0,570	0,665
Tau-a	0,082	...	0,051	0,106	0,102	0,130	0,389	0,098	0,327
c	0,584	...	0,767	0,861	0,700	0,668	0,890	0,781	0,827
Pares	61344	...	3696	5103	7452	8262	5796	608	1428

vidad, donde el estimador pasa a tomar signo positivo, lo que supone que al aumentar el número de opciones es más probable el nivel de coherencia mayor. Esto podría deberse a la gran concentración de preferencias cuasitransitivas en la muestra de cuestionarios de 6 opciones y la mayor presencia de niveles superiores de coherencia para 8 y 9 opciones.

En cuanto a los estadísticos referidos a la correlación entre las respuestas observadas y las probabilidades estimadas, al comparar pares de observaciones con respuestas distintas, la probabilidad de presentar el valor 0 (superar el nivel de coherencia en cuestión) es mayor que la de presentar el valor 1, en la mayoría de los casos (concordante). Por lo general es muy raro el caso contrario (discordante) y apenas hay empates. Lógicamente, el número de pares coincide con el producto del número de individuos que tienen a lo sumo ese nivel de coherencia por el número de individuos que lo superan.

En general se puede advertir cómo, al crecer la decisividad, aumenta la probabilidad de que las preferencias sean cuasitransitivas y semiórdenes, y disminuye la correspondiente a la 5-transitividad, 6-transitividad y 7-transitividad. Asimismo, se observa un máximo para grados de decisividad del 50% en las preferencias 4-transitivas y orden de intervalo, y otro máximo para grados de de-

cisividad del 70% en las preferencias 3-transitivas y preórdenes completos. Finalmente, se mantienen constantes las probabilidades de las preferencias 1-acíclicas, 2-acíclicas y acíclicas, ya que no dependen del grado de decisividad, como puede verse en el cuadro 6.

Para ver la influencia del número de opciones sobre el nivel de coherencia, se presentan las probabilidades estimadas en el gráfico 1, para un grado de decisividad del 70%. Es del todo razonable que, al aumentar el número de opciones, incrementalmente la probabilidad en los niveles de coherencia más bajos (1-acíclicidad, 2-acíclicidad, 4-transitividad y 3-transitividad), y disminuya para niveles superiores de coherencia (cuasitransitividad y, en menor medida, órdenes de intervalo). Resulta curioso que exista mayor probabilidad de que las relaciones de preferencia sean semiórdenes y preórdenes completos para 8 opciones que para 6 ó 7, tal como ha sido comentado al analizar los resultados de la estimación.

4. CONCLUSIONES

De los datos obtenidos en la encuesta realizada, habría que señalar que ha habido una gran proporción de estudiantes que han obtenido la más baja cualificación de coherencia, la 1-acíclicidad (43%). Cabe destacar que, si bien sólo se ha dado un caso de k -acíclicidad para $k \geq 2$, han aparecido todos los casos posibles de k -transitividad, incluso con mayor frecuencia que los relativos a los modelos clásicos de coherencia. Este hecho justifica, por sí mismo, el realismo de los modelos de k -transitividad introducidos en este trabajo.

A la vista de los resultados obtenidos en el marco del estudio empírico realizado, podemos destacar las siguientes consecuencias respecto a la verificación de los diferentes modelos de coherencia, entendidos en sentido estricto (más alto nivel conseguido):

1. Las variables edad, sexo e interés declarado no han sido significativas en ningún caso.

2. Ninguna de las variables ha resultado significativa para la consecución de la acíclicidad.

3. Para aquellos niveles de racionalidad en los que la decisividad fue la única variable significativa, se constata claramente, tal como se puede apreciar en el gráfico 2, que al aumentar la decisividad desciende la probabilidad de alcanzar la k -transitividad (para $k = 5, 6, 7$), mientras que aumenta la probabilidad de ser semiorden.

Esta aparente paradoja podría tener su explicación en que la decisividad influye positivamente en los niveles altos de coherencia y negativamente en los bajos.

4. Ha habido tres niveles de racionalidad en los que el número de opciones ha resultado ser la única variable significativa: los correspondientes a la k -acíclicidad (para los únicos casos que aparecen en la muestra: $k = 1, 2$) y la cuasitransitividad.

Mientras que al aumentar el número de opciones aumenta la probabilidad de caer en la k -acíclicidad, ocurre todo lo contrario en el caso de la cuasitransitivi-

Gráfico 1: DECISIVIDAD 70%

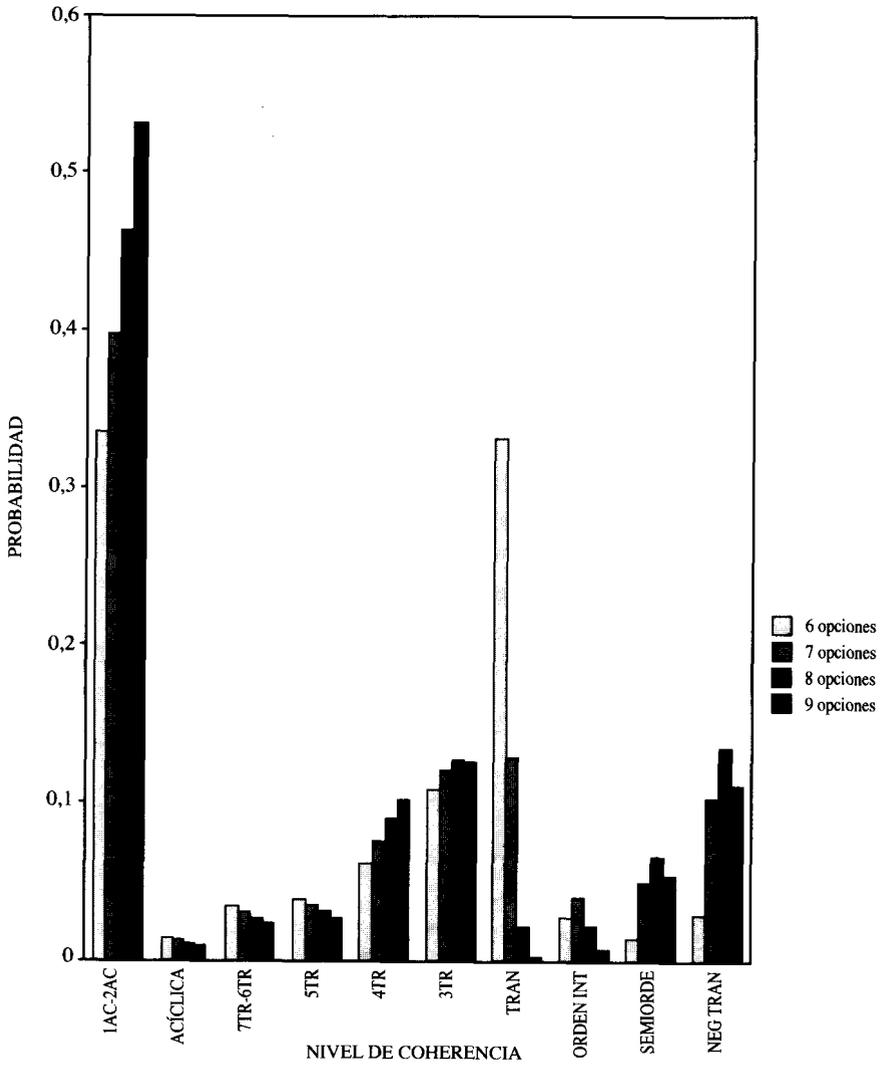


Gráfico 2

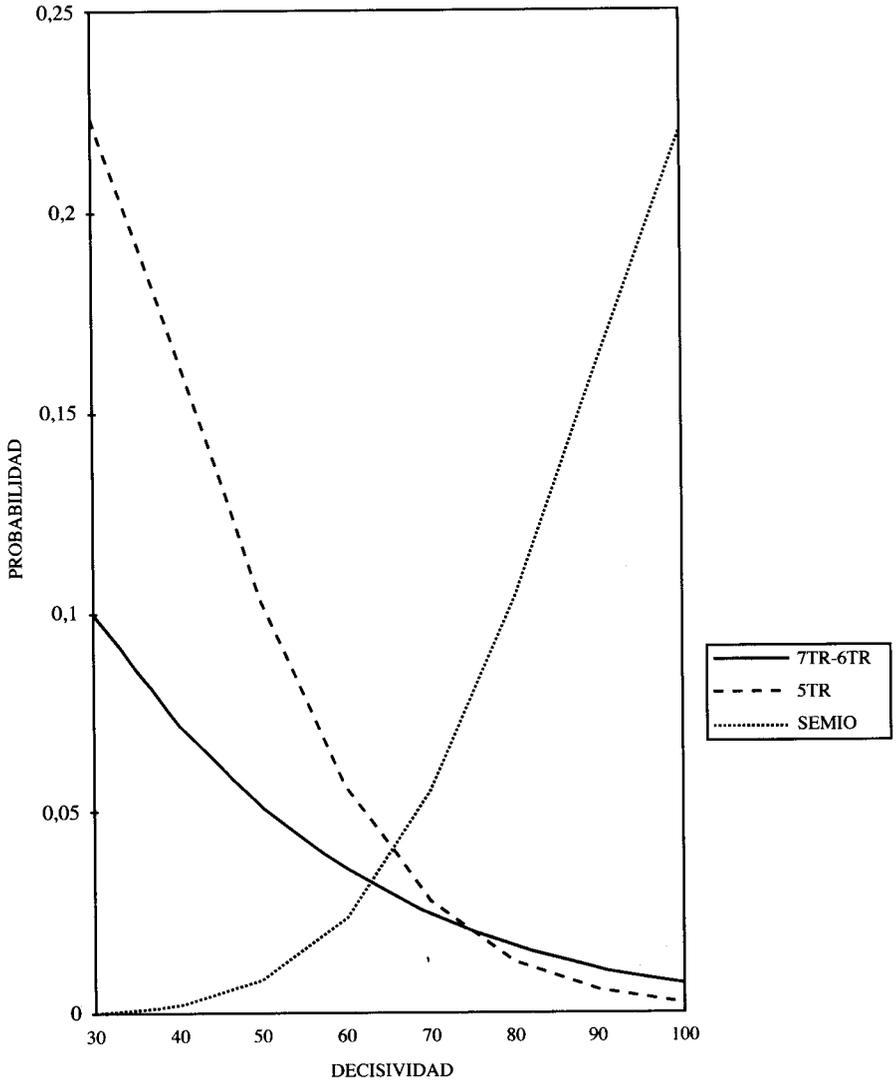


Gráfico 3

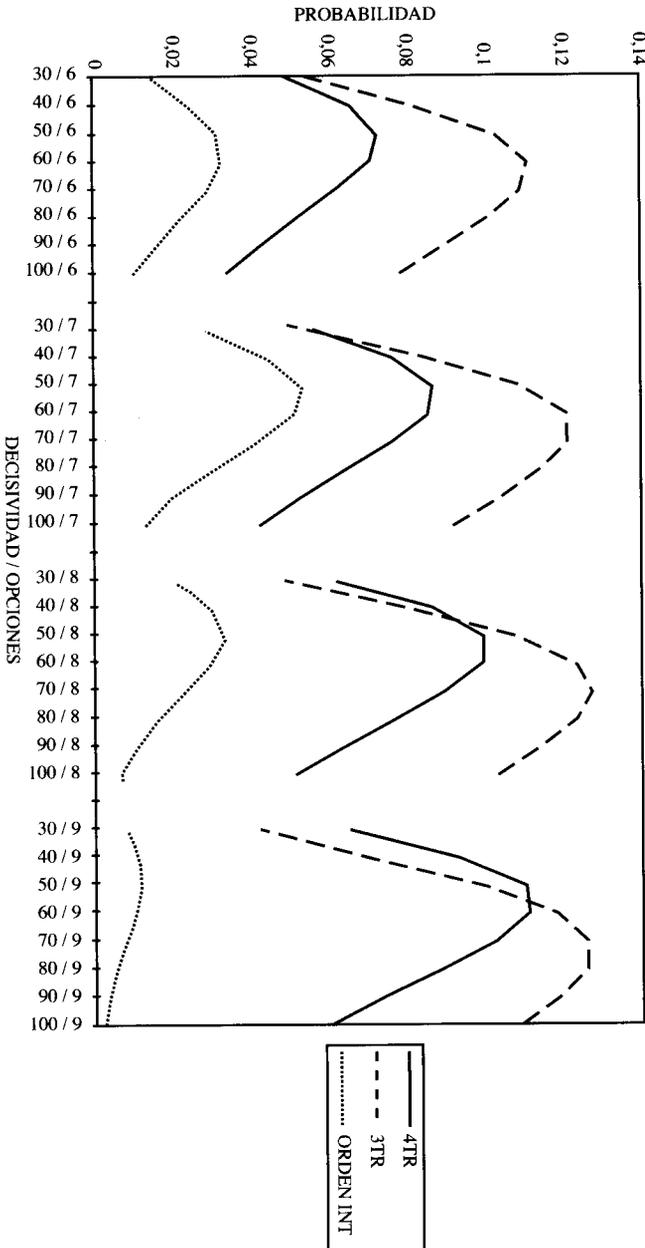
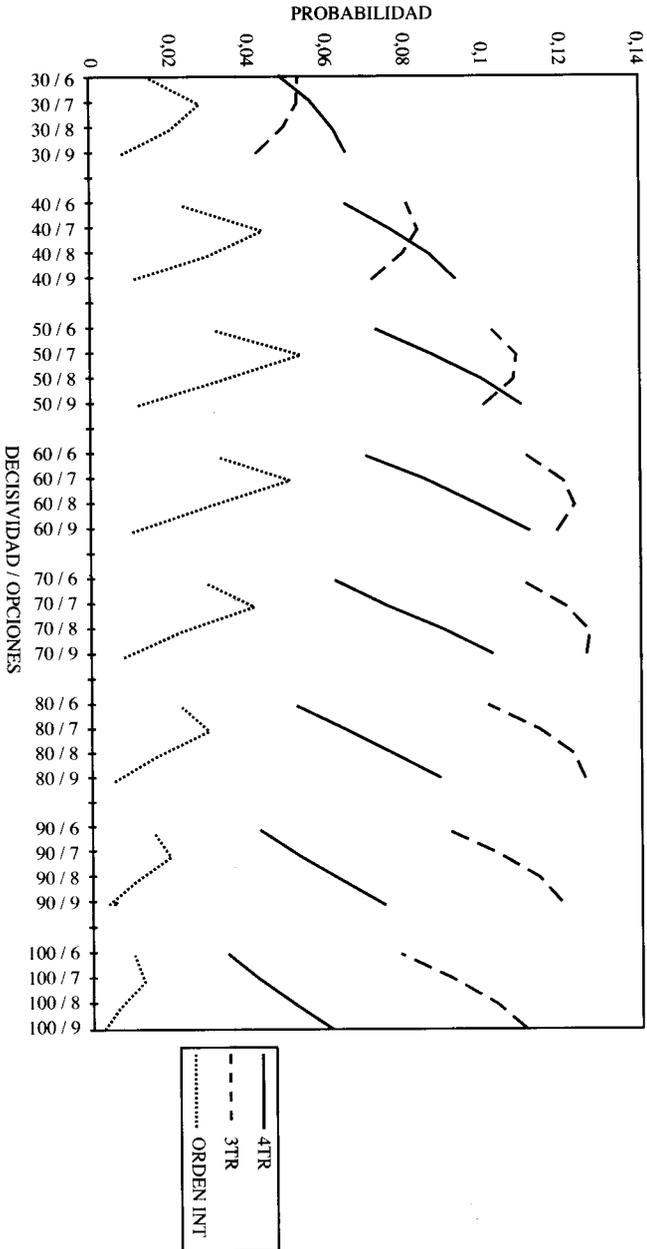


Gráfico 4



dad. Esto viene a coincidir con la hipótesis general, planteada inicialmente, de que un mayor número de opciones provoca la caída en niveles de coherencia más bajos.

5. El número de opciones y la decisividad han resultado simultáneamente significativas para los niveles de coherencia correspondientes a la k -transitividad (para $k = 3, 4$) y a los órdenes de intervalo.

Tal como puede observarse en los gráficos 3 y 4, no existe un comportamiento uniforme que permita extraer conclusiones generales válidas para los tres tipos de modelos. No obstante, pueden señalarse ciertas regularidades. Así, en el gráfico 3 se observa que al aumentar el número de opciones, aumenta la probabilidad de la 4-transitividad, cualquiera que sea el nivel de decisividad fijado, y se alcanza la mayor probabilidad para decisividades comprendidas entre el 50% y el 60%. Por otra parte, la probabilidad de orden de intervalo alcanza un máximo para 7 opciones en todos los niveles de decisividad; el máximo se sitúa de nuevo para decisividades comprendidas entre el 50% y el 60%.

Del gráfico 4 se desprende que las probabilidades de los tres modelos descritos tienen un máximo entre el 40% y el 70%, cualquiera que sea el número de opciones considerado.

En el estudio empírico realizado se ha puesto de manifiesto que la información vaga sobre las opciones a comparar, la posible utilización de criterios múltiples en la valoración de las opciones, el número de opciones a comparar y el grado de decisividad de los agentes a la hora de manifestar efectivamente sus preferencias, por lo general influyen negativamente sobre los niveles de coherencia alcanzados, de forma que sugieren la consideración de modelos de comportamiento racional más débiles que los convencionales. El programa informático elaborado en este trabajo facilita el contraste empírico de modelos de coherencia, lo cual permite un acercamiento entre los enfoques normativos y descriptivos de la teoría de la decisión.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Van Acker, P. (1990): "Transitivity revisited", *Annals of Operations Research*, 23, págs. 1-35.
- Aizerman, M.A. y Aleskerov, F.T. (1984): "The Arrow paradox in group choice theory (analysis of the problem)", *Automation and Remote Control*, 9, part 2, págs. 1211-1232.
- Amemiya, T. (1988): "Modelos de respuesta cualitativa: un examen", *Cuadernos Económicos del I.C.E.*, 39, págs. 173-243.
- Burris, S. y Sankappanavar, H.P. (1981): *A Course in Universal Algebra*, Nueva York, Springer Verlag.
- Camerer, C. (1994): "Individual decision making", en *Handbook of Experimental Economics*, J. Kagel y A. Roth (eds.), Princeton University Press, Princeton, págs. 587-703.
- Carrascal Arranz, U. (1997): *Aplicaciones Estadísticas y Económicas con SAS*, Madrid, Editorial RA-MA.

- Fishburn, P.C. (1970): "Intransitive indifference in preference theory: a survey", *Operations Research*, 18, págs. 207-228.
- Friedman, D. y Sunder, S. (1994): *Experimental Methods. A Primer for Economists*, Nueva York, Cambridge University Press.
- García Lapresta, J.L. y Rodríguez Palmero, C. (1996): "Some models of rational behavior around acyclicity", mimeo.
- Gracia Díez, M. (1988): "Modelos con variable dependiente cualitativa y de variación limitada", *Cuadernos Económicos del I.C.E.*, 39, págs. 7-49.
- Kahnemann, D. y Tversky, A. (1982): "On the study of statistical intuitions", *Cognition*, 11, págs. 123-141.
- Kim, K.H. y Roush, F.W. (1980): *Introduction to Mathematical Consensus Theory*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Nueva York, Marcel Dekker.
- Maddala, G.S. (1985): *Limited Dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Nueva York, Cambridge University Press.
- May, K.O. (1954): "Intransitivity, utility, and the aggregation of preference patterns", *Econometrica*, 22, págs. 1-13.
- Payne, J.W., Bettman, J. y Johnson, E. (1992): "Behavioral decision research: a constructive processing perspective", *Annual Review of Psychology*, 43, págs. 87-131.
- Peters, H. y Walker, P. (1991): "Independence of irrelevant alternatives and revealed group preferences", *Econometrica*, 59, págs. 1787-1801.
- Rubinstein, A. (1996): *Lectures on Modeling Bounded Rationality*, Louvain la Neuve, CORE Lecture Series.
- Schwartz, T. (1986): *The Logic of Collective Choice*, Nueva York, Columbia University Press.
- Shafir E. y Tversky, A. (1995): "Decision making", en *Invitation to Cognitive Science: Thinking*, D.N. Osherson y E.E. Smith (eds.), MIT Press.
- Simon, H. (1955): "A behavioral model of rational choice", *Quarterly Journal of Economics*, 69, págs. 99-118.
- Simon, H. (1956): "Rational choice and the structure of the environment", *Psychological Review*, 63, págs. 129-138.
- Simon, H. (1972): "Theories of bounded rationality", en *Decision and Organization*, C.B. McGuire y R. Radner (eds.), Amsterdam, North Holland, págs. 161-176.
- Smith, V.L. y Walker, J.M. (1993): "Monetary rewards and decision cost in experimental economics", *Economic Inquiry*, 31, págs. 245-261.
- Suzumura, K. (1983): *Rational Choice, Collective Decisions, and Social Welfare*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Tversky, A. y Kahnemann, D. (1981): "The framing of decisions and the psychology of choice", *Science*, 211, págs. 453-458.
- Uriarte Ayo, J.R. (1991): "Teoría de la decisión normativa versus teoría de la decisión descriptiva", *Revista de Economía Pública*, 13, págs. 85-112.

Fecha de recepción del original: noviembre, 1997
Versión final: octubre, 1998

ABSTRACT

The aim of this paper is to relate the coherence models used in normative theories with empirical reality. Classic behaviour models have been considered and k -acyclic and k -transitive preference relations have been introduced. In order to approximate theoretical structures to real behaviour, we have characterised the properties of the models used by means of algebraic conditions. We have then established a computer programme which determines the coherence levels reached by an individual in his preferences. Finally, we report the statistical results obtained from surveys involving 500 students, and we analyse the influence of certain variables on the coherence levels.

Keywords: acyclicity, bounded rationality, preferences, transitivity.