

PROCESOS ESTOCÁSTICOS DEL TIPO DE INTERÉS A CORTO PLAZO*

PAZ RICO

Universidad de Valencia

En este trabajo se estiman y comparan distintas especificaciones del proceso estocástico en tiempo continuo del tipo de interés a corto plazo libre de riesgo durante el período que abarca desde enero de 1989 hasta diciembre de 1995. Todos los modelos considerados se anidan en una ecuación diferencial estocástica que permite comparar los modelos entre sí. De los resultados obtenidos, se puede concluir que uno de los modelos que con mayor éxito explica la dinámica del tipo de interés a corto plazo es el modelo de equilibrio general con un factor de Cox, Ingersoll y Ross. Además, se obtiene evidencia de que se ha producido un cambio estructural en la dinámica del tipo de interés a corto plazo en abril de 1993.

Palabras clave: estructura temporal de los tipos de interés, cambio estructural, dinámica del tipo de interés, proceso estocástico.

Clasificación JEL: E43.

El análisis y obtención de la estructura temporal de los tipos de interés (ETTI) constituye uno de los temas que ha merecido un mayor número de trabajos de investigación, en los últimos años, dentro de la economía financiera. La ETTI es la función que relaciona los tipos de interés libres de riesgo de insolvencia y liquidez con su plazo. La importancia de la ETTI radica en sus múltiples aplicaciones en varios campos de la economía. En el campo de la economía financiera, permite valorar activos financieros y diseñar estrategias de inversión y cobertura. En teoría económica, es esencial en el estudio de temas tales como la formación de expectativas, las relaciones entre los tipos a corto y largo plazo, la transmisión de la política monetaria a las variables macroeconómicas relevantes, etc. Al Tesoro público le interesa por cuanto contribuye a conocer los condicionantes de su financiación y le permite diseñar correctamente su política de endeudamiento. Y por último, como indicador para la política monetaria, útil para analizar, junto con otras herramientas, las condiciones en las que ha de actuar la autoridad monetaria, las perspectivas de cumplimiento del objetivo establecido, y la percepción, por parte de los agentes, del tono de la política monetaria y del grado de confianza en su mantenimiento en el futuro.

(*) Este trabajo es parte de un capítulo de mi tesis doctoral dirigida por D. Javier Quesada Ibáñez. Quisiera agradecer a D. Ezequiel Uriel toda su ayuda prestada y sus interesantes comentarios. Cualquier error es sólo responsabilidad del autor.

Ahora bien, los tipos de interés al contado sólo pueden observarse a partir de activos financieros emitidos a descuento, activos que en el caso español tienen vencimiento inferior a un año¹. Los tipos observados para plazos superiores contienen, generalmente, primas de liquidez, sesgo de fiscalidad y de cupón, lo cual invalida su interpretación y utilización directa o inmediata como ETTI. Ello obliga a obtener la ETTI a partir de los tipos observados mediante algún método de estimación, generalmente, utilizando los precios de la deuda pública ya que estos instrumentos están exentos de riesgo de crédito y cuentan con mercados secundarios profundos para un amplio espectro de plazos.

En la modelización de la ETTI en tiempo continuo se puede distinguir dos aproximaciones, la primera basada en argumentos de arbitraje y la segunda en argumentos de equilibrio. En ambas, la determinación de la estructura temporal se plantea como un problema de valoración de activos de renta fija y está directamente inspirada en los modelos de fijación de precios para las opciones de Black y Scholes (1973) y en el concepto de equilibrio de la ETTI bajo incertidumbre introducido por Merton (1973a). *A priori* se define una forma funcional de acuerdo con la cual evolucionan los tipos de interés e imponiendo una serie de restricciones se estima el valor de los parámetros, que caracterizan esta forma funcional.

Los modelos de no arbitraje [Merton (1973a), Vasicek (1977), Dothan (1978), Brennan y Schwartz (1979, 1980)] parten de las condiciones necesarias para que no existan oportunidades de arbitraje. No especifican condiciones suficientes y el riesgo se especifica exógenamente. Los precios de los bonos a descuento dependen de un número finito de variables económicas fundamentales, denominadas variables estado, que siguen procesos estocásticos dados.

Por otro lado, el modelo de valoración intertemporal de activos de Merton (1973b) y el modelo de equilibrio con expectativas racionales de Lucas (1978) llevan a los investigadores a considerar modelos de equilibrio general de la ETTI [Cox, Ingersoll y Ross (1985a y b), Longstaff (1989), Longstaff y Schwartz (1992), Platten (1993)]. Los modelos de equilibrio general requieren fuertes supuestos sobre preferencias, entorno y tecnología como en un modelo neoclásico. El modelo pionero de Cox, Ingersoll y Ross (CIR) comienza con una descripción de la economía y de los supuestos sobre la evolución estocástica de uno o más factores exógenos o variables estado de la economía y sobre las preferencias de un inversor representativo. El equilibrio general deriva endógenamente los tipos de interés y los precios de todos los activos.

Los modelos de equilibrio general y de arbitraje tienen en común que ambos consideran que los tipos de interés se comportan como procesos estocásticos y los precios de los activos financieros dependen de éstos. En ambos se obtiene una ecuación diferencial que deben cumplir los precios de los activos, aunque su obtención varía de un modelo a otro. En todos ellos, la modelización del comportamiento dinámico del tipo de interés a corto plazo es crucial. Sin embargo, existen pocos trabajos en los que se comparen cómo se ajustan a los datos las distintas modelizaciones que se imponen a los tipos de interés. Esto se debe, probablemente-

(1) Durante 1997 comenzaron a emitirse letras del Tesoro a 18 meses y, desde enero de 1998, a negociarse, en el mercado de deuda, los denominados *strips* que permiten negociar por separado el principal y cada uno de los pagos intermedios de un título.

te, a la falta de un marco común en el cual los modelos pueden ser anidados. Muy frecuentemente, el trabajo empírico se centra en un modelo específico y no se compara con otro u otros modelos alternativos.

El propósito de este trabajo es estimar y comparar distintas especificaciones del proceso estocástico del tipo de interés instantáneo utilizando como *proxy* un tipo de interés a corto plazo. Para ello se utiliza la metodología de Chan *et al.* [CKLS (1992)] quienes estiman y comparan una variedad de modelos del tipo de interés a corto plazo libre de riesgo en tiempo continuo, a través de un modelo general que los incluye. No obstante, en lugar de utilizar, como CKLS, el método generalizado de momentos se utiliza, siguiendo a Nowman (1997), máxima verosimilitud a partir de un modelo discreto que tiene en cuenta las restricciones exactas de la distribución de los datos discretos que implican el modelo continuo. El análisis empírico lleva a concluir que la dinámica del tipo de interés a corto plazo no viene explicado por procesos sin reversión a la media, siendo los modelos de Vasicek (1977) y CIR (1985) los que mejor se ajustan a los datos, mientras que el modelo de Longstaff (1989), que teóricamente es más realista que los modelos de CIR y Vasicek, no resulta ser superior a éstos. La estructura de este trabajo es la siguiente. A continuación se presentan los modelos del tipo de interés a corto plazo que se han considerado. En el apartado segundo se presentan los datos utilizados y en el apartado tercero se recogen los resultados empíricos obtenidos de comparar los distintos modelos. Por último, el apartado cuarto recoge las principales conclusiones.

1. MODELOS DEL TIPO DE INTERÉS A CORTO PLAZO

La modelización de la ETTI en tiempo continuo (tanto unifactoriales como multifactoriales) implica una dinámica del tipo de interés instantáneo libre de riesgo que viene determinada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr = k(\mu - r)dt + \sigma r^\omega dz \quad [1]$$

donde k es la velocidad de ajuste del tipo de interés hacia su media de largo plazo μ , σr^ω es la volatilidad que caracteriza la variación del tipo de interés y dz es el incremento de un proceso Wiener estándar.

Esta dinámica implica que la media y varianza condicional de los cambios en el tipo de interés a corto plazo dependen de su nivel. Esta ecuación incluye la mayor parte de los modelos más conocidos. Estos modelos se obtienen de [1] simplemente imponiendo las restricciones oportunas a los cuatro parámetros k , μ , σ , y ω . De esta forma, podemos considerar las siguientes especificaciones de la dinámica del tipo de interés a corto plazo:

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. Merton ² (1973) | $dr = \mu dt + \sigma dz$ |
| 2. Vasicek (1977) | $dr = k(\mu - r)dt + \sigma dz$ |
| 3. CIR (1985b) | $dr = k(\mu - r)dt + \sigma r^{1/2} dz$ |

(2) En realidad, el parámetro m equivale a km en la especificación general [1].

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 4. Dothan (1978) | $dr = \sigma r dz$ |
| 5. Black and Scholes (1973, GBM) | $dr = -k r dt + \sigma r dz$ |
| 6. Brennan y Schwartz (1980, BS) | $dr = k(\mu - r)dt + \sigma r dz$ |
| 7. CIR (1980) | $dr = \sigma r^{3/2} dz$ |
| 8. CEV (1975, 1976) | $dr = -kr dt + \sigma r^\omega dz$ |

Junto a estas especificaciones que vienen recogidas por la ecuación estocástica (1) se considera también la especificación del proceso generador del tipo instantáneo propuesta por Longstaff (1989):

- | | |
|---------------------|---|
| 9. Longstaff (1989) | $dr = k(\mu - r^{1/2})dt + \sigma r^{1/2} dz$ |
|---------------------|---|

El modelo de Merton supone que el proceso estocástico del tipo de interés libre de riesgo es simplemente un movimiento *browniano* con *drift* (*random walk*), y el de Vasicek es un proceso *Ornstein-Uhlenbeck* (*elastic random walk*) que revierte en su media y tiene varianza constante. En ambos procesos la volatilidad condicional de los cambios del tipo de interés es constante. Su ventaja es su simplicidad y su desventaja es que pueden generar tipos de interés negativos.

El modelo 3 de CIR supone que el proceso estocástico del tipo de interés libre de riesgo revierte en su media y su varianza depende del nivel del tipo de interés. Los modelos de Dothan y Black y Scholes (*geometric brownian motion*) consideran que el tipo de interés sigue un movimiento *browniano* geométrico donde la variabilidad condicional es proporcional a r^2 . El modelo 6 es utilizado por Brennan y Schwartz (1980) para derivar numéricamente el precio de los bonos. El modelo 7 es introducido por CIR (1980) en su estudio de obligaciones con tipos variables (*variable rate securities*). El modelo 8 es el modelo de *constant elasticity of variance process* introducido por Cox (1975) y Cox and Ross (1976). Finalmente, el modelo de Longstaff supone que la tecnología es no lineal con la variable estado. En todos estos modelos, la varianza condicional del cambio del tipo de interés libre de riesgo es proporcional a una potencia positiva de r . Estos modelos eliminan los tipos de interés negativos en los siguientes casos: si $\omega > 0$, y si $\omega = 0$ y $\sigma^2 < 2\mu k$.

Para estimar los parámetros del modelo continuo se utiliza la siguiente especificación discreta del proceso [ver Nowman (1997)]:

$$\begin{aligned}
 r_{t+1} &= e^{-k} r_t - \mu(e^{-k} - 1) + \varepsilon_{t+1} \\
 E[\varepsilon_{t+i}\varepsilon_{t+j}] &= 0 \quad (i \neq j) \\
 E[\varepsilon_{t+1}^2] &= (\sigma^2/2k)(1 - e^{-2k})r_t^{2\omega}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Este modelo discreto tiene la ventaja de permitir que la varianza de los cambios del tipo de interés depende directamente del nivel de tipos de interés de forma consistente con el modelo continuo y, además, permite obtener un estimador máximo verosímil exacto.

Seguindo a Nowman (1997), $L(\beta)$ es menos dos veces el logaritmo de la función de verosimilitud gaussiana:

$$L(\beta) = \sum_{t=1}^T \left[\log E(\varepsilon_{t+1}^2) + \frac{\{r_{t+1} - e^{-k}r_t + (\mu(e^{-k} - 1))\}^2}{E(\varepsilon_{t+1}^2)} \right]$$

siendo β el vector de parámetros a estimar, $\beta = (b, \mu, \omega, \sigma)$.

2. DATOS

Dado que el tipo de interés instantáneo no es una variable observable se ha utilizado una *proxy* del mismo. Generalmente la *proxy* utilizada en la literatura es el rendimiento de los *Treasury Bills* con vencimiento a un mes [Ananthanarayanan y Schwartz (1980), Chan *et al.* (1992) y Broze *et al.* (1993)]. Sin embargo, en este trabajo como *proxy* del tipo de interés instantáneo se ha utilizado el tipo de interés a un día de las operaciones de compraventa con pacto de recompra de las letras del Tesoro³. Las observaciones son mensuales y comprenden el período entre enero de 1989 y diciembre de 1995.

Observando el gráfico del tipo de interés a un día se observa que se produce un cambio de tendencia a partir de abril de 1993 (ver gráfico 1). Este cambio de tendencia viene explicado por la variación de las expectativas de los agentes como consecuencia de la relajación de las presiones inflacionistas, de tal forma que, en 1993, tras superarse la crisis del SME, que se inició en junio de 1992, los mercados financieros españoles a corto plazo experimentaron descensos en los tipos de interés de acuerdo con la tendencia que siguieron los demás países comunitarios.

El cuadro 1 recoge los estadísticos descriptivos del tipo de interés a un día y su primera diferencia en todo el período considerado y en los dos subperíodos en que la muestra puede ser dividida atendiendo al cambio observado en la serie. Así, puede observarse un cambio sustancial en la media del tipo de interés y en su desviación estándar entre los dos subperíodos de la muestra. Mientras en el primer subperíodo la media se encuentra alrededor del 13%, en el segundo cae hasta el 9%.

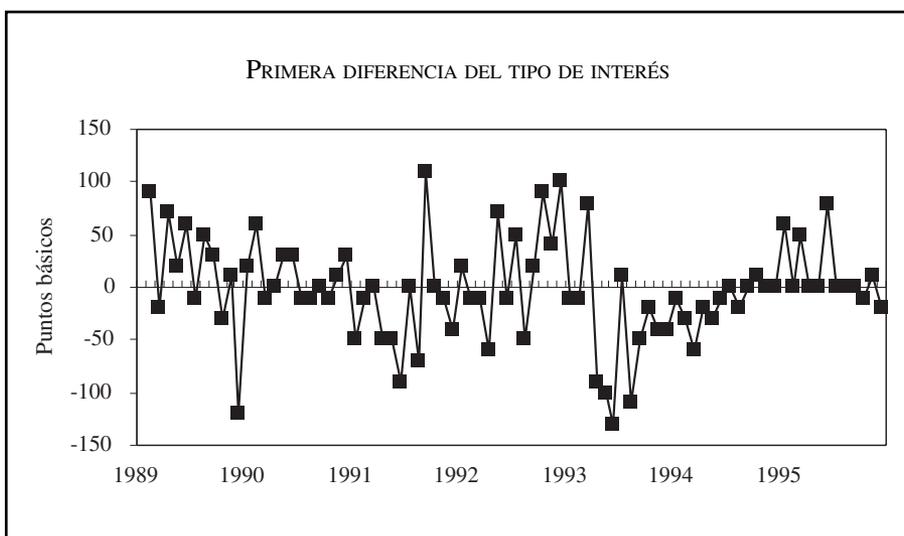
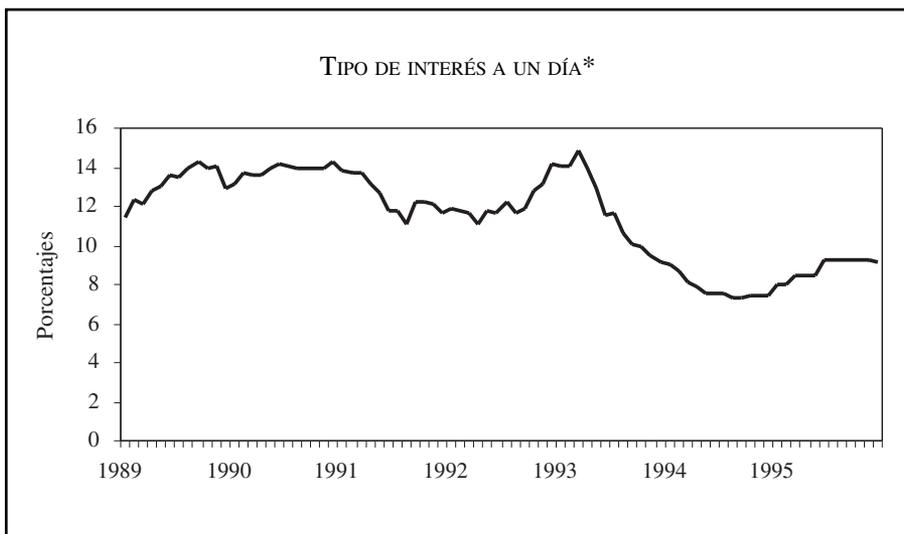
La media de la primera diferencia en todo el período es negativa, indicando que se ha producido caídas en los tipos de interés. Sin embargo, si se consideran por separado los dos subperíodos en que se puede dividir la muestra, mientras en el segundo la media de la primera diferencia presenta signo negativo, el primero presenta signo positivo lo que indicaría que durante este período los tipos de interés crecieron.

Respecto a los coeficientes de autocorrelación, los del tipo de interés en niveles son elevados y caen lentamente mientras que los de su primera diferencia son pequeños y no presentan ningún comportamiento. Esta evidencia indica que la serie del tipo de interés en niveles es no estacionaria pero sí lo es su primera diferencia.

Estos resultados son corroborados por el test de raíces unitarias Dickey-Fuller recogido en el cuadro. Por último, comentar que la primera diferencia del tipo de interés se distribuye como una normal atendiendo a los estadísticos de kurtosis, asimetría y Bera-Jarque.

(3) Para Serrat (1990), pág. 48, es la serie que mejor aproxima un tipo teórico sin riesgo de crédito.

Gráfico 1



*Tipo de interés de las operaciones de compraventa con pacto de recompra con letras del Tesoro.

Fuente: Boletín estadístico del Banco de España.

Cuadro 1: TIPO DE INTERÉS A UN DÍA. ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS						
	1989.01-1995.12		1989.01-1993.03		1993.04-1995.12	
	r	dr	r	dr	r	dr
Media	0,1145	-0,0002	0,1301	0,0007	0,0905	-0,0017
Desviación	0,0234	0,0048	0,0103	0,0049	0,0161	0,0044
Mínimo	0,0730	-0,0130	0,1110	-0,0120	0,0730	-0,0130
Máximo	0,1480	0,0110	0,1480	0,0110	0,1390	0,0080
Asimetría	-0,4381	-0,1215	-0,2374	-0,0253	1,2775	-0,5436
Kurtosis	1,7805	3,3992	1,6247	2,9667	4,3042	3,7306
Bera-Jarque	7,8927	0,7556	4,4980	0,0076	11,3152	2,3592
r(1)	0,973	0,097	0,834	-0,064	0,820	0,389
r(2)	0,942	0,284	0,734	0,200	0,670	0,484
r(3)	0,899	0,115	0,578	-0,020	0,564	0,455
r(4)	0,850	0,169	0,442	0,112	0,411	0,326
r(5)	0,795	0,063	0,320	0,101	0,303	0,305
r(6)	0,737	-0,082	0,209	-0,030	0,202	0,235
Dickey-Fuller	-2,023	-7,953	-1,142	-6,925	-3,408	-7,702

Nota: el tipo de interés a un día es el de las operaciones compraventa con pacto de recompra con letras del Tesoro. dr es la primera diferencia del tipo de interés a un día. Valor crítico del DF con constante y tendencia en cada período es -3,464, -3,504 y -3,551, respectivamente.

Fuente: elaboración propia a partir de los datos del Boletín estadístico del Banco de España.

A continuación se comentan los resultados obtenidos en las estimaciones de los nueve procesos restringidos y del modelo no restringido.

3. RESULTADOS EMPÍRICOS

Los modelos van a ser comparados mediante el estadístico de AKAIKE (AIC) que se calcula como suma de dos términos, en el primero de los cuales forma parte el logaritmo de verosimilitud. Su expresión es la siguiente:

$$AIC = -\frac{2}{T} \ln L(\beta) + \frac{2k}{T} \quad [4]$$

siendo $\ln L(\beta)$ el valor del logaritmo de verosimilitud evaluado en los estimadores obtenidos β , k es el número de estimadores y T el tamaño de la muestra. El estadístico AIC discrimina en función del valor maximizado de la función de verosimilitud de modelos alternativos pero penalizando por el número de parámetros estimados. En el estadístico AIC, a diferencia del coeficiente de determinación, cuanto mejor es el ajuste más pequeño es el valor que toma el estadístico.

El cuadro 2 recoge el valor de los parámetros estimados, sus estadísticos t de Student entre paréntesis, el logaritmo de la función de verosimilitud y el estadístico AIC de cada uno de los modelos considerados y del modelo no restringido. Como puede observarse se ha estimado cada uno de los modelos en tres períodos de tiempo, el período muestral y dos subperíodos que abarcan desde enero de 1989 a marzo de 1993 y desde abril de 1993 hasta diciembre de 1995, respectivamente. La razón de partir la muestra ha sido obtener modelos que para el conjunto de la muestra estiman bien el tipo de interés a corto plazo pero en los que los parámetros no son significativos. Esto hace sospechar la presencia de un cambio estructural a lo largo del período, tal y como se observa en el gráfico de la variable dependiente, que genera inestabilidad en la estimación de los parámetros. Al estimar los modelos en los dos submuestras, en la mayoría de ellos se obtiene que los parámetros estimados pasan a ser significativos y algunos de estos parámetros presentan cambios significativos de valor entre las dos submuestras.

Con el fin de comprobar en que parámetros se ha producido un cambio estructural significativo se propone la siguiente especificación en la que se considera la posibilidad de un cambio estructural en cada uno de los parámetros⁴:

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= e^{-(k+Dk_1)} r_t - [(\mu + D\mu_1)(e^{-(k+Dk_1)} - 1)] + \varepsilon_{t+1} \\ E[\varepsilon_{t+i}\varepsilon_{t+j}] &= 0 \quad (i \neq j) \\ E[\varepsilon_{t+1}^2] &= [(\sigma^2 + D\sigma_1^2)/2(k + Dk_1)](1 - e^{-2(k+Dk_1)})r_t^{2\omega} \end{aligned} \quad [5]$$

donde D es una variable ficticia que toma valor 1 desde 1989.01 hasta 1993.03 y valor 0 desde 1993.04 hasta 1995.12, y los parámetros k_1 , μ_1 y σ_1 son los asociados a la variable ficticia, de forma que si son significativos indicaran que se ha producido un cambio estructural en los parámetros del modelo.

(4) De igual forma procede Chan, Karolyi, Longstaff and Sanders (1992).

Cuadro 2: RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN DEL PROCESO DINÁMICO DEL TIPO DE INTERÉS A UN DÍA

		1989.01-1995.12						1989.01-1993.03						1993.04-1995.12					
		K	Media	Sigma	Expon.	Logaritmo		K	Media	Sigma	Expon.	Logaritmo		K	Media	Sigma	Expon.	Logaritmo	
						Verosímil	AIC					Verosímil	AIC					Verosímil	AIC
CIR	Exponente = 0.5	0,0136 (0,499)	0,0943 (1,640)	0,0139 (13,360)	-	404,325	-9,670	0,1209 (1,583)	0,1357 (16,039)	0,0140 (9,222)	-	242,453	-9,578	0,1771 (4,340)	0,0816 (18,840)	0,0110 (8,250)	-	174,726	-10,407
CIR	Exponente = 1.5	-	-	0,1227 (14,184)	-	404,873	-9,732	-	-	0,1110 (10,642)	-	238,331	-9,493	-	-	0,1387 (8,630)	-	167,553	-10,094
BS	Exponente = 1	0,0129 (0,551)	0,0936 (2,009)	0,0411 (12,992)	-	405,478	-9,698	0,1261 (1,612)	0,1354 (15,575)	0,0396 (9,203)	-	241,741	-9,550	0,1703 (3,554)	0,0813 (19,458)	0,0360 (8,289)	-	174,547	-10,397
VASICEK	Exponente = 0	0,0153 (0,474)	0,0965 (1,532)	0,0048 (13,848)	-	401,909	-9,612	0,1166 (1,548)	0,1359 (16,625)	0,0050 (9,331)	-	243,013	-9,601	0,1818 (5,079)	0,0818 (17,721)	0,0034 (8,364)	-	174,410	-10,388
MERTON	Exponente = 0	-0,0029 (0,678)	-	0,0048 (14,131)	-	401,757	-9,632	0,0045	-	0,0048 (0,850)	-	241,561	-9,582	0,0248	-	0,0041 (3,531)	-	164,950	-9,876
DOTHAN	Exponente = 1	-	-	0,0409 (13,652)	-	405,227	-9,740	-	-	0,0390 (10,295)	-	239,465	-9,359	-	-	0,0437 (8,690)	-	166,024	-10,001
GBM	Exponente = 1	0,0019 (0,414)	-	0,0410 (13,606)	-	405,314	-9,718	(0,0059) (-1,091)	-	0,0384 (9,980)	-	240,057	-9,522	0,0138 (1,842)	-	0,0418 (9,407)	-	167,745	-10,045
CEV		0,0017 (0,3507)	-	0,0544 (1,194)	1,1305 (2,987)	405,368	-9,696	-0,0025 (-0,462)	-	0,0001 (0,347)	-1,759 (-1,224)	242,579	-9,583	0,0066 (0,662)	-	0,4205 (0,463)	1,975 (2,233)	168,709	-10,043
No Restrिंग.		0,0129 (0,5366)	0,0935 (1,852)	0,0558 (1,062)	1,1402 (2,648)	405,539	-9,676	0,1103 (1,373)	0,1361 (19,127)	0,0001 (0,323)	-1,586 (-1,026)	243,774	-9,591	0,1764 (4,179)	0,0815 (17,687)	0,0126 (0,488)	0,556 (0,653)	174,729	-10,347
LONGSTAFF	Exponente = 0.5	0,4455 (17,108)	-0,2818 (-9,830)	0,0173 (12,640)	-	403,055	-9,640	0,4576 (5,994)	-0,2650 (-3,256)	0,0164 (9,308)	-	242,228	-9,569	0,6348 (17,113)	-0,1483 (-7,812)	0,0134 (8,089)	-	174,639	-10,402

Nota: los valores entre paréntesis son los estadísticos t-Student.

Cuadro 3: ESTIMACIÓN DEL PROCESO DINÁMICO DEL TIPO DE INTERÉS A UN DÍA. CAMBIO ESTRUCTURAL

		K	K1	Media	Media1	Sigma	Sigma1	Exponente	Logaritmo Verosímil	AIC	RV
CIR	Exponente = 0,5	0,1771 (4,346)	-0,0563 (-0,650)	0,0816 (18,865)	0,0541 (5,688)	0,0110 (8,265)	0,0030 (1,486)	-	417,179	-9,908	25,71
CIR	Exponente = 1,5	-	-	-	-	0,1387 (8,629)	-0,0277 (-1,447)	-	405,884	-9,732	2,03
BS	Exponente = 1	0,1704 (3,560)	-0,0443 (-0,483)	0,0813 (19,523)	0,0541 (5,607)	0,0366 (8,299)	0,0030 (0,479)	-	416,288	-9,886	21,62
VASICEK	Exponente = 0	0,1818 (5,080)	-0,0652 (-0,781)	0,0819 (17,724)	0,0540 (5,756)	0,0034 (8,365)	0,0016 (2,427)	-	417,424	-9,914	31,04
MERTON	Exponente = 0	0,0248	-0,0294 (3,531)	- (-3,324)	-	0,0041	0,0007 (9,162)	- (1,038)	406,511	-9,699	9,51
DOTHAN	Exponente = 1	-	-	-	-	0,0437	-0,0047 (8,687)	- (-0,748)	405,489	-9,723	0,52
GBM	Exponente = 1	0,0139	-0,0198 (1,846)	- (-2,135)	-	0,0418	-0,0035 (9,418)	- (-0,569)	407,803	-9,730	4,98
CEV		0,0134	-0,0194 (1,329)	- (-1,825)	-	0,0471	-0,0043 (0,633)	1,0508 (-0,258)	407,806	-9,706	4,88
No Restrिंग.		0,1813	-0,0640 (4,918)	0,0818 (-0,761)	0,0540 (16,989)	0,0040 (5,710)	0,0018 (0,655)	0,0737 (1,046)	417,431	-9,890	23,78
LONGSTAFF	Exponente = 0,5	0,6348	-0,1773 (17,116)	-0,1483 (-2,088)	-0,1168 (-7,814)	0,0135 (-1,397)	0,0029 (8,093)	- (1,207)	416,867	-9,903	27,62

Nota: los valores entre paréntesis son los estadísticos t-Student.
RV es el contraste razón de verosimilitud.

Los resultados de la estimación de esta especificación para cada uno de los modelos considerados aparecen recogidos en el cuadro 3. Asimismo, el cuadro 3 recoge el contraste de la razón de verosimilitud⁵ que permite contrastar la significatividad conjunta de los parámetros asociados a la variable ficticia. El resultado de este contraste evidencia que estos parámetros son significativos conjuntamente y, por tanto, se constata la existencia de cambio estructural en los modelos de CIR (1985), BS, Vasicek, Merton, Longstaff y no restringido. En los modelos de CIR (1980), Dothan, GBM y CEV los parámetros asociados a la variable ficticia no resultan ser significativos, por lo que no se puede aceptar la existencia de cambio estructural en estos modelos. No obstante, los modelos sin reversión a la media⁶ son superados por cualquiera de los otros modelos por lo que no parece que la dinámica del tipo de interés a corto plazo venga explicada por procesos sin reversión a la media. Centrándonos en el resto de modelos, y analizando la significatividad individual de cada uno de los coeficientes asociados a la variable ficticia, se puede concluir que en los modelos de CIR, BS, no restringido y Longstaff sólo presenta cambio estructural el parámetro μ , siendo no significativos los cambios operados por el resto de parámetros. En el modelo de Vasicek el cambio estructural se observa tanto en μ como en σ . Estos resultados parecen indicar que se ha producido un cambio en la media de los tipos de interés y que en los modelos en los que la volatilidad depende del nivel del tipo de interés, los cambios en la varianza de la dinámica del tipo de interés vienen recogidos por esta variable (CIR, BS, Longstaff y no restringido) mientras que en el modelo de Vasicek, en el que la volatilidad es constante, el cambio en la varianza de la dinámica del tipo de interés lo recoge el parámetro σ .

Respecto a la comparación entre modelos, el modelo de Vasicek es el que mejor se ajusta a los datos seguido por el modelo de CIR (1985b) cuyo criterio de AIC es inferior al de Vasicek por un margen muy estrecho ($0,6 \cdot 10^{-2}$). No obstante, si observamos de nuevo el cuadro 2, en la estimación por subperíodos se observa que en el primer subperíodo el modelo de Vasicek ajusta mejor que el de CIR pero en el segundo subperíodo ocurre lo contrario. Por tanto, parece que hay indicios para poder concluir que en el segundo subperíodo la varianza de la dinámica del tipo de interés a corto plazo no es constante sino que depende del nivel de los tipos de interés, tal y como especifica el modelo de CIR. Otra conclusión interesante a resaltar de estos resultados es que el modelo de Longstaff no resulta ser superior al de CIR. Los modelos unifactor como el de CIR implican estructuras temporales monótonas o con una joroba, lo cual ha sido criticado puesto que en

(5) El contraste razón de verosimilitud (RV) viene dado por la siguiente expresión:

$$RV = -2 \left[\ln L(\hat{\beta}_0) - \ln L(\hat{\beta}) \right]$$

donde $\hat{\beta}_0$ es el estimador máximo verosímil en el modelo restringido y $\hat{\beta}$ es el estimador máximo verosímil en el modelo sin restringir. Dicho contraste se distribuye asintóticamente como una χ^2 con r grados de libertad, siendo r el número de restricciones que implica la hipótesis nula.

(6) Con respecto a los modelos CIR (1980), Dothan, GBM y CEV decir que no cumplen las condiciones de estacionalidad [ver Broze *et al.* (1995)] y si se han estimado ha sido por el interés de comparar los distintos modelos, tal y como hace Broze *et al.* (1995) y Bliss and Smith (1997).

ocasiones la ETTI puede presentar formas más complejas. Ello ha llevado a que determinados autores planteen modelos multifactor en el mismo marco de equilibrio general, continuo y estocástico de CIR, y que implican estructuras temporales más complejas. Sin embargo, desafortunadamente tienen la desventaja de ser muy costosos en términos de cálculo y del número de parámetros adicionales a estimar. Longstaff (1989) considera un camino más simple y directo al modificar la hipótesis de la evolución estocástica de la variable estado y del proceso de producción. Longstaff permite que el cambio tecnológico afecte al rendimiento de la producción de forma no lineal, con lo que el rendimiento de los bonos es una función no lineal de la tasa libre de riesgo. Este modelo teóricamente más realista que el de CIR parece que en nuestro caso se ajusta peor a los datos que el modelo unifactor y con tecnología lineal de CIR.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se comparan nueve modelos de la dinámica del tipo de interés a corto plazo con el fin de determinar qué modelo se ajusta mejor a los datos. Todos estos modelos han sido anidados en una ecuación diferencial estocástica que permite estimar cada uno de ellos imponiendo las restricciones oportunas.

La estimación del proceso continuo del tipo de interés instantáneo mediante una aproximación discreta de la ecuación diferencial utilizando, como *proxy* del tipo de interés instantáneo sin riesgo, la serie histórica de un tipo de interés a corto plazo, ha permitido llegar a las siguientes conclusiones:

1) La dinámica del tipo de interés a corto plazo no viene explicada por procesos sin reversión a la media.

2) Durante el período 1989-1995 se produce un cambio estructural en la dinámica del tipo de interés a corto plazo que afecta a su valor de largo plazo y a su varianza.

3) Los modelos de Vasicek y CIR (1985b) son los que mejor se ajustan a los datos. El modelo de Vasicek supera al de CIR por un margen muy estrecho. No obstante, existe evidencia para concluir que tras el cambio estructural la varianza de la dinámica del tipo de interés depende del nivel del tipo de interés, tal y como especifica el modelo de CIR, de forma que en el segundo subperíodo de la muestra el modelo de CIR se ajusta mejor a los datos que el de Vasicek.

4) El modelo de Longstaff (1989) que considera la tecnología no lineal no resulta ser superior a los modelos con tecnología lineal como el de CIR (1985b) y Vasicek.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ananthanarayanan, A.L. y E.S. Schwartz (1980): "Retractable and extendible bonds: the Canadian experience", *Journal of Finance*, vol. XXXV, n.º 1, March, págs. 31-47.
- Black, F. y M. Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of political economy*, vol. 81, n.º 3, May-June, págs. 637-654.

- Bliss R.R. y D.C. Smith (1997): "The stability of interest rate processes", *Working Paper 97-13, Federal Reserve Bank of Atlanta*, November.
- Brennan, M.J. y E.S. Schwartz (1979): "A continuous time approach to the pricing of bonds", *Journal of Banking and Finance*, 3, págs. 135-155.
- Brennan, M.J. y E.S. Schwartz (1980): "Conditional predictions of bond prices and return", *Journal of Finance*, vol. XXXV, n.º 2, May, págs. 405-419.
- Broze, L., O. Scaillet y J.M. Zakoian (1993): "Testing for continuous-time model of the short-term interest rate", *Journal of Empirical Finance*, 2, págs. 199-223.
- Chambers, D.R., W.T. Carleton y D.W. Waldman (1984): "A new approach to estimation of the term structure of interest rates", *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 19, n.º 3, September, págs. 233-252.
- Chan, K.C., G.A. Karolyi, F.A. Longstaff y A.B. Sanders (1992): "An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate", *Journal of finance*, págs. 1209-1227.
- Cox (1975): "Notes on option pricing invariance: constant elasticity of variance differences", *Working paper, Stanford, University*.
- Cox D.R., y S.A. Ross (1976): "The valuation of options for alternative stochastic processes", *Journal of Financial Economics*, n.º 3, págs. 145-166.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1980): "An analysis of variable rate loan contracts", *Journal of Finance*, 35, págs. 389-403.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985a): "An intertemporal general equilibrium model of asset prices", *Econometrica*, vol. 53, n.º 2, March, págs. 363-384.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll y S.A. Ross (1985b): "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, Vol. 53, n.º 2, March, págs. 385-407.
- Dixit, A.K. y R.S. Pindyck (1994): *Investment under uncertainty*, Princeton, Chapter 3, págs. 59-132.
- Dothan, L.U. (1978): "On the term structure of interest rates", *Journal of financial economics*, n.º 6 págs. 59-69.
- Kagan A.M., Yu.V. Linnik y C.R. Rao (1973): *Characterization Problems in Mathematical Statistics* John Wiley and Sons. Wiley series in probability and mathematical statistics.
- Longstaff, F.A. (1989): "A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates", *Journal of financial economics*, 23, págs. 195-224.
- Longstaff, F.A. y E.S. Schwartz (1992): "Interest rate volatility and the term structure: a two-factor general equilibrium model", *Journal of finance*, vol. XLVII, n.º 4, September, págs. 1259-1282.
- Lucas, R.E. (1978): "Asset prices in an exchange economy", *Econometrica*, n.º 46, págs. 1426-1446.
- McCulloch, J.H. (1971): "Measuring the term structure of interest rates", *The Journal of business*, vol. XLIV, January, págs. 19-31.
- McCulloch, J.H. (1975): "The tax-adjusted yield curve", *The Journal of Finance*, vol. XXX, n.º 3, June, págs. 811-830.
- Merton (1973a): "Theory of rational option pricing", *The Bell journal of economics and management science*, n.º 4, págs. 141-183.
- Merton (1973b): "An intertemporal capital asset pricing model", *Econometrica*, n.º 41, págs. 867-887.
- Nelson, C.R. y A.F. Siegel (1987): "Parsimonious modeling of yield curves", *Journal of business*, vol. 60, n.º 4, págs. 473-489.

- Nowman, K.B. (1997): "Gaussian Estimation of Single-factor Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates", *The Journal of Finance*, vol. LII, n.º 4, September (1997) págs. 1695-1706.
- Nuñez, S. (1995): "Comparación y elección entre métodos alternativos de estimación de la estructura temporal de los tipos de interés para el caso español", *II Jornadas de Economía Financiera*, vol. II, Día 16 de junio de 1995. Fundación BBC, Bilbao.
- Platten, Y. (1994): "General equilibrium and the term structure of interest rates: a two-factor model", *Journées internationales of finance*, Tunis les 23-24-25 of Juin, 1994. Université de droit, d'économie et de gestion. Tuniz III.
- Serrat, A. (1990): *Modelización de la estructura intertemporal de tipos de interés en equilibrio general*. Documento de trabajo, n.º 9006, Septiembre. Centro de Estudios Monetarios y Financieros.
- Vasicek, O. (1977): "An equilibrium characterization on the term structure", *Journal of financial economics*, n.º 5, págs. 177-178.
- Vasicek, O. y H.G. Fong (1982): "Term structure modeling using exponential splines", *Journal of finance*, vol. 37, n.º 2, may, págs. 339-356.

Fecha de recepción del original: junio, 1997
Versión final: mayo, 1999

ABSTRACT

In this paper, we estimate and compare a variety of continuous-time models of the short-term riskless rate at a monthly frequency covering the period from 1989 to 1995. All of the models are nested within a simple framework that allows us to compare them directly to each other. We find that one of the most successful models in capturing the dynamics of the short-term interest rate is the one-factor version of the Cox, Ingersoll and Ross model. Moreover, there is evidence of a structural shift in the interest process in April 1993.

Key words: term structure of interest rates, structural shift, dynamics of the interest rate, stochastic process.

JEL classification: E43.